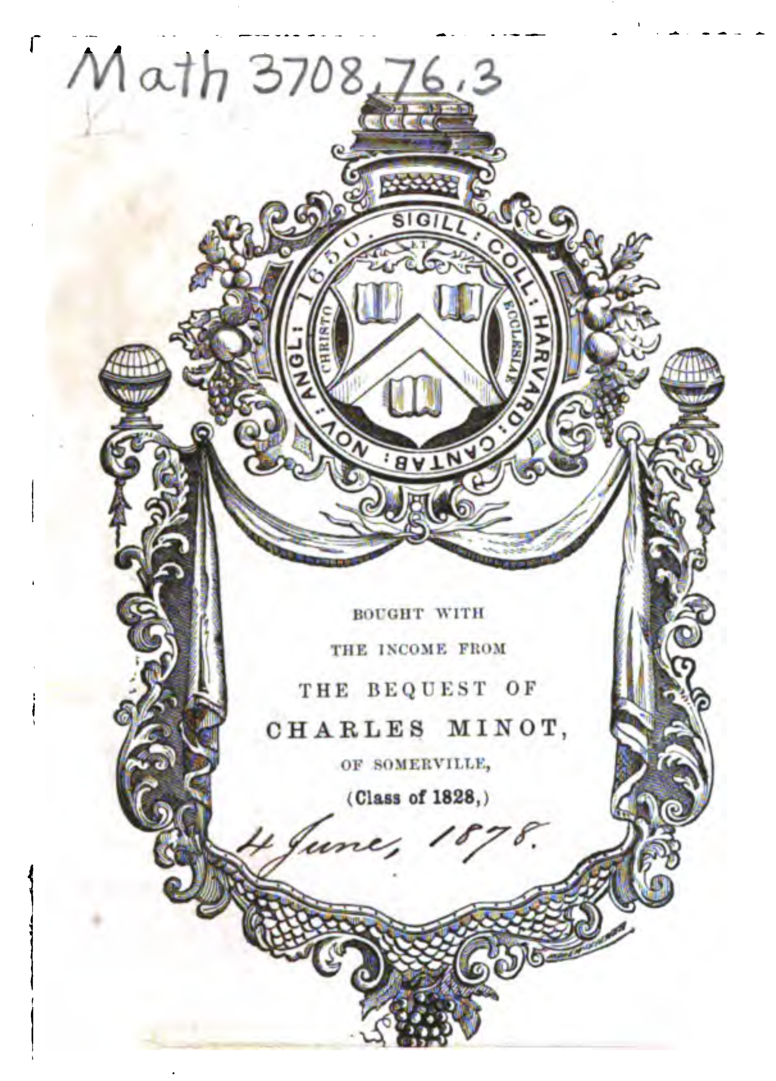

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
CHARLES MINOT,
OF SOMERVILLE,
(Class of 1828,)
4 June, 1878.

ıeln

en Functionen

Replik.

Zweimal habe ich die Ehre gehabt, Besprechungen über von mir verfasste Schriften in Grunert's Archiv, herausgegeben von Herrn Hoppe, zu finden. Beide sind H. unterzeichnet und scheinen von dem Herrn Herausgeber selbst herzurühren. Diese Besprechungen erfordern einige Worte der Erwiederung.

Die erste derselben befindet sich im Litterarischen Bericht CCXXIX auf Seite 6 bis 8. Beinahe drei Octavseiten engen Druckes nimmt diese Besprechung ein und beschäftigt sich fast ausschliesslich mit dem kaum halb so langen Vorwort zu meiner 1873 im Verlag von L. Nebert in Halle erschienenen Schrift über die Geometrie der Lage in der Ebene. Ueber Herrn H.'s apodiktische Entscheidungen über die Nothwendigkeit einiger Voraussetzungen in der Raumwissenschaft zu streiten wäre wohl unfruchtbar, und ich will nur Folgendes bemerken. Das Vorwort versteht unter Anfängern ganz unzweideutig solche, welche an einer Universität analytische oder synthetische Geometrie zum ersten Male hören. Es ist sogar ausdrücklich bemerkt, dass entweder die Sache schon von der analytischen Seite her als bekannt vorausgesetzt werde, oder dass doch wenigstens gute Kenntnisse in der gewöhnlichen Geometrie schon erlangt sein müssen. Ich hatte im Winter 1872/73 eine Vorlesung (publice) über die Geometrie der Lage in Halle gehalten, und hatte mich dabei einer solchen Aufmerksamkeit und eines solchen Fleisses von Seiten meiner Zuhörer zu erfreuen, dass ich es als eine Erfahrung im Vorwort aussprechen konnte: „Einen ganz besonderen Reiz hat aber die synthetische Geometrie, wenn sie von der der Raumwissenschaft an sich fremden, aber in die Euklidische Methode verwebten, Hypothese des Vorhandenseins eines vom Orte (in seinem Masse) unabhängigen beweglichen Körpers d. h. einem Massstabe absieht etc." Der Herr Rec. stellt sich nun vor, dass die Zuhörer, weil ich sie Anfänger nenne, von den Congruenzsätzen noch nichts wüssten, und beweist mit packender Gründlichkeit, dass für solche ein Reiz nicht existiren könne, und dass eine Geometrie ohne den Maassbegriff für solche schädlich sein müsse. Herr H. macht sich eine Strohpuppe, um sie zu prügeln. Ueber die Schrift selbst, braucht der Rec. nichts zu sagen, weil die Methode durch die Sache gefordert werde. Daher ist es wohl eine besondere Begünstigung des Verfassers, dass ein kurzer Auszug aus dem Inhaltsverzeichnisse noch folgt. Zum Schlusse sagt Herr H. noch, „Die Darstellung der obwohl durchweg ebenen Geometrie verlange um der Projectivität willen, öfters die Betrachtung verschiedener Ebenen." Bekanntlich bedarf man des Raumes nur zum Beweis des Fundamentalsatzes, harmonische Gebilde betreffend. Ausser bei Begründung dieses Satzes und bei einigen, welche darauf vorbereiten sollen, also auf den ersten fünf Seiten sonst nirgend, sind räumliche Vorstellungen benutzt.

Die zweite Besprechung betrifft die von mir in demselben Verlage 1873 in zweiter Auflage erschienene Schrift „Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Theta-Functionen einer Veränderlichen". Obwohl es Herr H. vermisst, dass dort nirgend gesagt ist, was für Vorkenntnisse ich voraussetze, so hat er doch beim Lesen

ganz richtig bemerkt, dass ich die Kenntniss der Infinitesimalrechnung im Allgemeinen voraussetze, aber nicht voraussetze, dass diejenigen Lücken in der Begründung dieser Theorie, welche erst durch „namhafte Entdecker" in neuerer Zeit aufgefunden wurden, schon ausgefüllt sind. Wenn Herr H. dies tadelt, und eine solche Vorbildung eine äusserst laxe nennt, so meine ich doch, dass auf Grund der vorhandenen Lehrbücher nicht mehr zu erwarten ist. Auch glaube ich kaum, dass in den elementaren Vorlesungen, bei denen das Erlernen der Technik meist erstes Ziel ist, jene Lücken allgemein ausgefüllt werden, indem dazu erst Vorlesungen höherer Art namentlich die über complexe Functionen benutzt werden. Dabei bleibt es freilich völlig uncontrolirt, wie viel andere Lücken fortbestehen. Wenn Herr H. im Stande ist, eine „durch Evidenz unverrückbare Basis" aufzustellen, so würde er nach meiner Ansicht nicht nur diejenigen namhaften Entdecker, welche besagte Lücken gefunden haben, völlig in den Schatten stellen, sondern er würde damit wohl über die grössten Mathematiker aller Zeiten zu stellen sein. Denn wer könnte grösser sein als der, der namhafte Entdecker weiterer Lücken unmöglich und überflüssig machte.

Herr H. protestirt dagegen, dass ich für eine Theorie der Theta-Functionen die Theorie der complexen Functionen für unentbehrlich halte. Ganz richtig. Wer von Berlin nach Petersburg fahren will, kann, wenn er will, von der Erfindung der Eisenbahnen ganz abstrahiren. Nicht in demselben Masse kann man bei Begründung der Theorie der Thetafunctionen von den allgemeinen Sätzen der complexen Functionentheorie abstrahiren, wie Herr H. selbst zugiebt.

Auf Seite 7 und 8 der besprochenen Schrift beweise ich den von Herrn Heine zuerst ausgesprochenen und in Crelle's Journal B. 74 Seite 185 bewiesenen Satz, dass eine Function, die zwischen a und b in jedem einzelnen Puncte stetig ist, auch so stetig sei, dass ein einziges für alle x gleiches Intervall δ angegeben werden könne, so dass $f(x \pm \delta) - f(x) < \sigma$ ist, wenn σ beliebig klein vorgegeben ist. Herr Heine nennt diese Eigenschaft, welche abgesehen von den den Grenzen unendlich nahe benachbarten Puncten jeder stetigen Function zukommt, „gleichmässige Stetigkeit" und es hat auch Herr Lüroth einen Beweis dieses Satzes gegeben. Herr H. hat nun die Fragestellung nicht verstanden und benutzt die Stelle mir Unsinn zu insinuiren.

Welchen Nutzen kann eine Kritik für das Publikum oder den Autor haben, welche nicht von dem ausgeht, was in der zu beurtheilenden Schrift steht, sondern von dem, was sie supponirt?

Ich will hier noch die Bemerkung hinzufügen, dass die auf Seite 11 aufgeworfene Frage, ob eine stetige nicht constante Function existiren könne, deren nur in positiver Richtung gebildeter Differentialquotient überall 0 ist, bereits von Dirichlet erledigt ist. Man sehe darüber Meyer „Dirichlet's Vorlesungen über bestimmte Integrale" Seite 27.

Freiburg, im März 1876. **J. Thomae.**

Sammlung von Formeln

welche bei Anwendung

der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen

gebraucht werden.

Von

Johannes

Dr. J. Thomae,

Professor zu Freiburg i. B.

Halle a/S.

Verlag von Louis Nebert.

1876.

Vorwort.

Seit dem Erscheinen der ersten Arbeiten von Rosenhain und Göpel über die ultraelliptischen Functionen hat die Theorie jener und noch allgemeinerer Functionen, die unter dem Namen „Abelsche Functionen" zusammengefasst werden, namentlich durch die Arbeiten von **Riemann** und **Weierstrass** so grosse Fortschritte gemacht, dass sie, wenigstens in ihren allgemeineren Theilen, beinahe eine fertige genannt werden kann. Ein fester Grundriss ist gezeichnet, welcher die Gestalt und Schönheit des Ganzen dem Analysten klar erkennen lässt. Die neuern Arbeiten wollen durch Hineinlegen von Lichtern die Grundideen nicht abändern, sondern dieselben nur theils ihren Urhebern selbst, theils einem grössern Publikum verständlicher machen, oder wo die Linien nicht ausgezogen, nur angedeutet sind, das Angedeutete ausführen. So sind Viele, welche ihre Kräfte der Abrundung dieser Theorie widmen, und Manches ist geschehen. Um so auffallender muss es daher sein, dass nach einer andern Richtung hin, der der praktischen Anwendung dieser Functionen, so sehr wenig geschehen ist. Abgesehen von einigen geometrischen Interpretationen analytischer Sätze aus der Theorie der Abel'schen Functionen, oder einigen Anwendungen der mehrfach unendlichen ϑ-Reihen auf Zahlentheorie, welches sind denn da die Anwendungen, die man von den Abel'schen Functionen gemacht hat, welches sind die Anwendungen, die man auch nur von der ersten Klasse der ultraelliptischen Functionen gemacht hat? Es ist mir wenigstens nur eine einzige fast vollendete Arbeit bekannt, welche die Anwendung der Rosenhain-Göpel'schen Functionen zum Gegenstand hat, nämlich eine Abhandlung des Herrn Weierstrass in den Monatsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1861 Seite 986 bis 997. Dort findet sich ein Vortrag über die kürzeste Linie auf dem dreiachsigen Ellipsoid, von welcher schon Jacobi gezeigt hatte, dass ihre Gleichungen sich durch ultraelliptische Functionen ausdrücken lassen. Dies Problem scheint mir eins der schönsten für die Anwendung der Rosenhain'schen Functionen zu sein, da die Coordinaten der geodätischen Linie durch Rosenhain'sche Functionen, die Länge der Linie durch ein einfaches Integral zweiter Gattung, mithin durch die Differentialquotienten einer ϑ-Function ausgedrückt wird. Diese Abhandlung fand einen äussern Veranlassungsgrund darin, dass der russische General v. Schubert auf Grund einer von ihm angestellten Vergleichung verschiedener Gradmessungen annehmen zu müssen glaubte, dass die Gestalt der Erde erheblich von der eines Umdrehungsellipsoides abweiche. Diese Ansicht hat seitdem Herr v. Schubert selbst wieder fallen gelassen, und man ist wohl allgemein zu der alten Ansicht, dass die Erde am besten durch ein abgeplattetes Rotationsellipsoid

dargestellt werde, wieder zurückgekehrt. Es wäre zu bedauern, wenn dies der Grund sein sollte, weshalb der Arbeit des Herrn Weierstrass der versprochene zweite Theil nicht nachgefolgt ist, (wenigstens ist mir nichts davon bekannt). Nach den Schlussworten der citirten Abhandlung des Herrn Weierstrass sollte dieser zweite Theil Reihenentwicklungen für ϑ-Quotienten enthalten, die auch praktisch brauchbar seien. Diese Worte lassen die Deutung zu, als ob die von Herrn Weierstrass für die Coordinaten und Länge der geodätischen Linie gegebenen eleganten Ausdrücke praktisch nicht brauchbar seien. Dies scheint mir jedoch nicht ausgemacht, und jene so schöne Arbeit ist daher wohl noch einer Vervollständigung, die diese Seite in den Vordergrund stellt, werth.

Unter den Gründen, welche die bisher so geringe Verwendung selbst der ersten Klasse der ultraelliptischen Functionen erklären, schien mir der nicht der geringste, dass es an einer Zusammenstellung der Formeln, die für den praktischen Gebrauch nothwendig sind, gänzlich fehlt. Jeder, der daran geht, Anwendung von diesen Functionen zu machen, ist genöthigt, entweder die Formeln, die er braucht, sich jedesmal selbst herzuleiten, oder doch aus den verschiedensten Abhandlungen, die sich noch dazu verschiedener Bezeichnungen bedienen, zusammen zu suchen. Viele Formeln die nöthig sind, wird er vielleicht gar nicht finden, weil die meisten Bearbeitungen mehr theoretische Ziele, weniger die praktische Verwendung im Auge hatten. Diese Lücke einigermassen auszufüllen habe ich hier den Versuch gemacht. Es sind zuerst die Formeln, die bei Anwendung der gewöhnlichen elliptischen Functionen gebraucht werden, zusammengestellt, weil da, wo man mit ultraelliptischen Functionen rechnet, meist auch die elliptischen gebraucht werden. Wenn es sich nun beim Gebrauch dieser Sammlung herausstellen sollte, dass manche Formel, die gesucht wird, nicht darin steht, und wenn sich andere kleine Missstände finden sollten, so möge man berücksichtigen, dass dieselben bei einer ersten Anlegung einer solchen Sammlung sich wohl kaum vermeiden lassen, zumal es eben an durchgeführten Anwendungen noch gänzlich fehlt, an denen die Vollständigkeit und Correctheit hätte geprüft werden können.

Es war meine Absicht der Sammlung als zweiten Theil und als Anwendung die Untersuchung der Bewegung eines schweren Punktes auf einem Kegelschnitt mit horizontal-vertikalen Achsen folgen zu lassen. Dabei würden die verschiedensten Verhältnisse der Moduln der ultraelliptischen Functionen zu berücksichtigen gewesen sein. Auch das Vorkommen conjugirt imaginärer Verzweigungspunkte, für deren Behandlung von Herrn Henoch schon Vorschriften gegeben sind, würde interessante Seiten geboten haben. An der völligen Durchführung dieser Absicht wurde ich durch äussere Umstände verhindert, und ich habe mich daher vorläufig begnügt, um nur zu zeigen, wie sich die Formeln des ersten Theiles verwenden lassen, eine Untersuchung der Bewegung auf einem Kreise, einer Parabel und einer Ellipse mit vertikaler grosser Achse, kleiner Excentricität und mässiger Amplitude der Schwingung, anzufügen.

Möchte dieser Anfang dazu beitragen zahlreichere Anwendungen der Rosenhain'schen Functionen hervorzurufen.

Freiburg i. B., im März 1876.

J. Thomae.

Inhaltsverzeichniss.

I.

Formeln aus der Theorie der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen.

Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen Functionen gebraucht werden.

Formeln, welche bei Anwendung der Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden.

Anhang.

II.

Anwendungen der elliptischen und Rosenhainschen Functionen.

I.

Formeln aus der Theorie der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen.

Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen Functionen gebraucht werden.

Integrale erster Gattung und elliptische Functionen.

Zur Definition der elliptischen Integrale und zur Feststellung der Bezeichnungen dienen die Gleichungen:

$$(1)\quad u=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^{\xi}\frac{\frac12 d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa\xi)}}=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=F(\varphi,k),$$

$$k^2=\varkappa,\quad x^2=\xi,$$

$$(2)\quad K=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^1\frac{\frac12 d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa\xi)}}=F\left(\frac{\pi}{2},k\right)=F,$$

$$k^2+k'^2=1,\quad \varkappa+\varkappa'=1,$$

$$(3)\quad K'=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2)(1-k'^2x^2)}}=\int_0^1\frac{\frac12 d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa'\xi)}}=F\left(\frac{\pi}{2},k'\right)=F'$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}=\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

Durch hypergeometrische Reihen drücken sich K und K' so aus:

$$(4)\quad K=\tfrac12\pi\,F(\tfrac12,\tfrac12,1,k^2),\quad K'=\tfrac12\pi\,F(\tfrac12,\tfrac12,1,k'^2).$$

Weiter ist:

$$(5)\quad F(\tfrac12 m\pi+\varphi,k)=mK+F(\varphi,k),\quad F(\tfrac12 m\pi+\varphi,k')=mK'+F(\varphi,k').$$

$$(6)\quad x=\sin\operatorname{am}(u,k)=\sin\operatorname{am}u,\quad \xi=\sin^2\operatorname{am}u,\quad \varphi=\operatorname{am}(u,k),\quad \operatorname{am}(K-u)=\operatorname{coam}u.$$

$$(7)\quad \Theta(u)=\Theta_0^0(u)=1+2q\cos\frac{u\pi}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}+2q^9\cos\frac{3u\pi}{K}+\dots+2q^{m^2}\cos\frac{m\pi u}{K}+\dots,$$

$$(8)\quad \Theta_1^0(u)=1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}-2q^9\cos\frac{3\pi u}{K}+\dots+(-1)^m 2q^{m^2}\cos\frac{m\pi u}{K}+\dots,$$

$$(9)\quad \Theta_0^1(u)=2\sqrt[4]{q}\left\{\cos\frac{\pi u}{2K}+q^2\cos\frac{3\pi u}{2K}+q^6\cos\frac{5\pi u}{2K}+\dots+q^{m(m+1)}\cos\frac{(2m+1)\pi u}{2K}+\dots\right\},$$

$$(10)\quad \Theta_1^1(u)=2\sqrt[4]{q}\left\{\sin\frac{\pi u}{2K}-q^2\sin\frac{3\pi u}{K}+\dots+(-1)^m q^{m(m+1)}\sin\frac{(2m+1)\pi u}{2K}+\dots\right\}=H(u).$$

$$(11)\quad \sin\operatorname{am} u = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\frac{\Theta_1^1(u)}{\Theta_1^0(u)},\quad \frac{\Theta_0^1(0)}{\Theta_0^0(0)} = \sqrt{k},\quad \frac{\Theta_1^0(0)}{\Theta_0^0(0)} = \sqrt{k'},$$

$$(12)\quad \cos\operatorname{am} u = \sqrt{1-\sin^2\operatorname{am} u} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{\Theta_0^1(u)}{\Theta_1^0(u)},$$

$$(13)\quad \varDelta\operatorname{am} u\ (=\varDelta\varphi) = \sqrt{1-k^2\sin\operatorname{am} u} = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta\ (u)}{\Theta_1^0(u)},\quad \operatorname{tg}\operatorname{am} u = \frac{\sin\operatorname{am} u}{\cos\operatorname{am} u}.$$

$$(14)\quad \begin{cases} q = e^{-\frac{\pi K}{K'}} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} + \frac{2}{2^5}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^5 + \frac{15}{2^9}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^9 + \frac{150}{2^{13}}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^{13} \\ \qquad + \frac{1707}{2^{17}}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^{17} + \ldots, \\ q' = e^{-\frac{\pi K'}{K}} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} + \frac{2}{2^5}\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^5 + \frac{15}{2^9}\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^9 + \ldots,\quad \lg q\,.\lg q' = \pi^2, \end{cases}$$

$$(15)\quad K = \tfrac{1}{2}\pi\Big(1+2\sum_1^\infty{}_{(m)}\, q^{m^2}\Big)^2 = \tfrac{1}{2}\pi \prod_1^\infty{}_{(m)}(1+q^{2m-1})^4\,(1-q^{2m})^2,\quad \pi K' = -K\lg q.$$

Setzt man:

$$(16)\quad \cos\frac{u\pi}{K} = \frac{N}{2q}(1-2q^4+q^2N^2),\quad N = \frac{\varDelta\operatorname{am} u-\sqrt{k'}}{\varDelta\operatorname{am} u+\sqrt{k'}},$$

$$(17)\quad u = \frac{K}{\pi}\arccos\frac{N}{2q}(1-2q^4+q^2N^2) = \frac{iK}{\pi}\lg\frac{N}{2q} + \frac{iK}{\pi}\lg\left[1-2q^4+q^2N^2-\sqrt{(1-2q^4+2q^2N^2)^2-\frac{4q^2}{N^2}}\right],$$

so vernachlässigt man eine Potenzreihe von der Form 17 $q^8.\varepsilon + Aq^{12}+\ldots$ worin für reelle $u\pi:K$ die Zahl ε kleiner als Eins ist. Ist aber $u\pi:K$ rein imaginär, und liegt u zwischen $-\frac{1}{2}iK'$ und $+\frac{1}{2}iK'$, so vernachlässigt man $\varepsilon q^4 +$ höhere Potenzen. Setzt man aber:

$$(18)\quad \cos\frac{u\pi}{K} = \frac{N}{2q},\quad \frac{u\pi}{K} = \arccos\frac{N}{2q} = i\lg\left(\frac{N}{2q}-\sqrt{\frac{N^2}{4q^2}-1}\right) = i\lg\frac{N-\sqrt{N^2-4q^2}}{2q},$$

so vernachlässigt man für reelle u und K $2q^3$ für rein imaginäre u zwischen $-\frac{1}{2}iK'$ und $+\frac{1}{2}iK'$ aber q^2. Gleichwohl ist die Formel, wie sich zeigen wird, sehr brauchbar.*)

---

*) Setzt man zur Abkürzung $\varDelta\operatorname{am} u = \nu$, so folgt aus (13):

$$\sqrt{k'}-\nu+2q(\sqrt{k'}+\nu)\cos\frac{u\pi}{K}+2q^4(\sqrt{k'}-\nu)\cos\frac{2u\pi}{K}+2q^9\cos\frac{3u\pi}{K}+\ldots = 0$$

oder wenn man mit $\sqrt{k'}+\nu$ dividirt, und wie im Text zur Abkürzung $(\nu-\sqrt{k'}):(\nu+\sqrt{k'}) = N$ setzt,

$$2q\cos\frac{u\pi}{K} = N+2q^4N\cos\frac{2\pi u}{K}-2q^9\cos\frac{3u\pi}{K}+\ldots$$

Sind nun u und K und k' reell, so ist $N < 2q$, und man vernachlässigt demnach, wenn $\cos\frac{u\pi}{K} = \frac{2q}{N}$ gesetzt wird, $2q^4\varepsilon$ etc. $\varepsilon < 1$. Wenn aber u rein imaginär ist und zwischen $-\frac{1}{2}iK'$ und $\frac{1}{2}iK'$ liegt, wird $N < 1$ und man vernachlässigt dann $q^2\varepsilon +$ höhere Potenzen. Man kann aber die Annäherung weiter treiben. Man setzt

$$\begin{aligned} 2q\cos\frac{u\pi}{K} &= N(1-2q^4)+4q^4N\cos^2\frac{u\pi}{K}-2q^9\cos\frac{3u\pi}{K}+\ldots \\ &= N(1-2q^4)+q^2N\Big(N+2q^4N\cos\frac{2\pi u}{K}-2q^9\cos\frac{3\pi u}{K}+\ldots\Big)^2-2q^9\cos\frac{3\pi u}{K}+\ldots \\ &= N(1-2q^4)+q^2N^3+4q^6N^3\cos\frac{2\pi u}{K}-2q^9\cos\frac{3u\pi}{K}+\ldots \end{aligned}$$

$$\cos\frac{u\pi}{K} = \frac{N}{2q}+\tfrac{1}{2}qN^3-q^3N\ |\ +2q^5N^3\cos\frac{2\pi u}{K}-q^8\cos\frac{3\pi u}{K}\ldots$$

Lässt man das hinter | stehende fort, so ergeben sich die obigen Angaben.

Differentialgleichungen der elliptischen Funtionen.

(19) $\frac{d\,\mathrm{am}\,u}{du} = \Delta\,\mathrm{am}\,u, \quad \frac{d\sin\mathrm{am}\,u}{du} = \sqrt{(1-\sin^2\mathrm{am}\,u)\,(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u)} = \cos\mathrm{am}\,u\;\Delta\,\mathrm{am}\,u,$

(20) $\frac{d\cos\mathrm{am}\,u}{du} = -\Delta\,\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,u = -k'\sqrt{(1-\cos^2\mathrm{am}\,u)\,(1+\frac{k^2}{k'^2}\cos^2\mathrm{am}\,u)},$

(21) $\frac{d\Delta\,\mathrm{am}\,u}{du} = -k^2\sin\mathrm{am}\,u\,\cos\mathrm{am}\,u = -kk'\sqrt{(\Delta^2\mathrm{am}\,u-1)\,(1-\frac{k'^2}{k^2}\Delta^2\mathrm{am}\,u)},$

(22) $\frac{d\,\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,u}{du} = \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u} = \sqrt{(1+\mathrm{tg}^2\mathrm{am}\,u)(1+k'^2\,\mathrm{tg}^2\mathrm{am}\,u)},$

(23) $\frac{d\frac{1}{\cos\mathrm{am}\,u}}{du} = \frac{\sin\mathrm{am}\,u\;\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\cos^2\mathrm{am}\,u} = k\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2\mathrm{am}\,u}-1\right)\left(1+\frac{k'^2}{k^2}\,\frac{1}{\cos^2\mathrm{am}\,u}\right)}.$

Hieraus folgt:

(24) $\int_{-1}^{z}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1+h^2z^2)}} = v, \quad z = -\cos\mathrm{am}\left(\sqrt{1+h^2}\,v,\ \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\right),$

(25) $\int_{-1}^{z}\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)\,(1-h^2z^2)}} = v, \quad z = -\Delta\,\mathrm{am}\left(hv,\ \frac{\sqrt{h^2-1}}{h}\right),$

(26) $\int_{0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)\,(1+h^2z^2)}} = v, \quad z = \mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,(v,\ \sqrt{1-h^2}),$

(27) $\int_{1}^{z}\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)\,(1+h^2z)}} = v, \quad z = \frac{1}{\cos\mathrm{am}}\left(\frac{v}{\sqrt{1+h^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\right).$

(28) Werthe der elliptischen Functionen für besondere Argumente.

$\sin\mathrm{am}\,0 = 0,\ \sin\mathrm{am}\,K = 1,\ \sin K+iK' = \frac{1}{k},\ \sin\mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}K = \sqrt{\frac{1}{1+k'}},\ \sin\mathrm{am}\,iK' = \infty,$

$\cos\mathrm{am}\,0 = 1,\ \cos\mathrm{am}\,K = 0,\ \cos\mathrm{am}\,K+iK' = \frac{-ik'}{k},\ \cos\mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}K = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}},\ \cos\mathrm{am}\,iK' = \infty,$

$\Delta\,\mathrm{am}\,0 = 1,\ \Delta\,\mathrm{am}\,K = k',\ \Delta\,\mathrm{am}\,K+ik' = 0,\ \Delta\,\mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}K = \sqrt{k'},\ \Delta\,\mathrm{am}\,iK' = \infty,$

$\mathrm{am}\,0 = 0,\ \mathrm{am}\,K = \tfrac{1}{2}\pi,\ \mathrm{am}\,2K = \pi,$

$\sin\mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}iK' = i:\sqrt{k},\ \cos\mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}iK' = \sqrt{1+k}:\sqrt{k},\ \Delta\,\mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}iK' = \sqrt{1+k},$

$\sin\mathrm{am}\,K+\tfrac{1}{2}iK' = 1:\sqrt{k},\ \cos\mathrm{am}\,K+\tfrac{1}{2}iK' = -i\sqrt{1-k}:\sqrt{k},\ \Delta\,\mathrm{am}\,K+\tfrac{1}{2}iK' = \sqrt{1-k}.$

Periodicität und Transformation.

(m und n sind durchweg ganze positive oder negative Zahlen.)

(29) $\sin\mathrm{am}-u = -\sin\mathrm{am}\,u\quad \cos\mathrm{am}-u = \cos\mathrm{am}\,u,\ \Delta\,\mathrm{am}-u = \Delta\,\mathrm{am}\,u,\ \mathrm{tg}\,\mathrm{am}-u = -\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,u,$

(30) $\sin\mathrm{am}\,u+4mK+2niK' = \sin\mathrm{am}\,u,\ \sin\mathrm{am}\,u\pm 2K = -\sin\mathrm{am}\,u,\ \sin\mathrm{am}\,2K-u = \sin\mathrm{am}\,u,$

(31) $\sin\mathrm{am}\,u\pm iK' = \frac{1}{k\sin\mathrm{am}\,u},\ \sin\mathrm{am}\,iK'+u = -\sin\mathrm{am}\,iK'-u,\ \sin\mathrm{am}\,u+K+iK' = \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{k\cos\mathrm{am}\,u},$

(32) $\sin\mathrm{am}\,(ui,\ k) = i\,\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,(u,\ k'),\ \sin\mathrm{am}\,iu+K = \frac{\cos\mathrm{am}\,iu}{\Delta\,\mathrm{am}\,iu} = \frac{1}{\Delta\,\mathrm{am}\,(u,\ k')},$

(33) $\sin\mathrm{am}\,(u,\ k) = \frac{1}{k}\sin\mathrm{am}\left(uk,\ \frac{1}{k}\right),\ \sin\mathrm{am}\,(u,\ k) = \sin\mathrm{am}\left(uk',\ \frac{ik}{k'}\right):k'\,\Delta\,\mathrm{am}\left(uk',\ \frac{ik}{k'}\right).$

(34) $\cos\operatorname{am} u+4mK+2n(iK'+K) = \cos\operatorname{am} u,\quad \cos\operatorname{am} u+2iK' = -\cos\operatorname{am} u,\quad \cos\operatorname{am} u+2K = -\cos\operatorname{am} u,$

$\cos\operatorname{am} u \pm K = \mp\frac{k'\sin\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u},\quad \cos\operatorname{coam} u = \cos\operatorname{am} K-u = \frac{k'\sin\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u},\quad \cos\operatorname{am} K+u = -\cos\operatorname{am} K-u,$

(35) $\cos\operatorname{am} iK'\pm u = \pm\frac{\Delta\operatorname{am} u}{ik\sin\operatorname{am} u},\quad \cos\operatorname{am}(u+K+iK') = \frac{k'}{ik\cos\operatorname{am} u},\quad \cos\operatorname{am} u = \Delta\operatorname{am}\left(uk,\ \frac{1}{k}\right),$

(36) $\cos\operatorname{am} iu = \frac{1}{\cos\operatorname{am}(u,\ k')},\quad \cos\operatorname{am} u = \cos\operatorname{am}\left(uk',\ \frac{ik}{k'}\right) : \Delta\operatorname{am}\left(uk',\ \frac{ik}{k'}\right).$

(37) $\Delta\operatorname{am} u+2mK+4niK' = \Delta\operatorname{am} u,\quad \Delta\operatorname{am} u+2iK' = -\Delta\operatorname{am} u,$

$\Delta\operatorname{coam} u = \Delta\operatorname{am} K-u = k' : \Delta\operatorname{am} u = \Delta\operatorname{am} u+K.$

(38) $\Delta\operatorname{am} u+iK' = \frac{\cos\operatorname{am} u}{i\sin\operatorname{am} u},\quad \Delta\operatorname{am} u+K+iK' = \frac{ik'\sin\operatorname{am} u}{\cos\operatorname{am} u},\quad \Delta\operatorname{am} iK'-u = -\Delta\operatorname{am} iK'+u.$

(39) $\Delta\operatorname{am} iu = \frac{\Delta\operatorname{am}(u,\ k')}{\cos\operatorname{am}(u,\ k')} = \frac{1}{\sin\operatorname{coam}(u,\ k')} = \frac{1}{\sin\operatorname{am}(K'-u,\ k')},$

$\Delta\operatorname{am} u = \cos\operatorname{am}\left(uk,\ \frac{1}{k}\right),\quad \Delta\operatorname{am} u = 1 : \Delta\operatorname{am}\left(uk',\ \frac{ik}{k'}\right).$

(40) $\operatorname{tg}\operatorname{am} iu = i\sin\operatorname{am}(u,\ k'),\quad \operatorname{tg}\operatorname{am}(u+iK') = i : \Delta\operatorname{am} u,\quad ik\operatorname{tg}\operatorname{coam} u+iK' = \Delta\operatorname{am} u.$

(41) $\sin\operatorname{am}((1+k)u,\ k_1) = \frac{(1+k)\sin\operatorname{am} u}{1+k\sin^2\operatorname{am} u},\quad \cos\operatorname{am}((1+k)u,\ k_1) = \frac{\cos\operatorname{am} u\ \Delta\operatorname{am} u}{1+k\sin^2\operatorname{am} u},$

$\operatorname{tg}\operatorname{am}((1+k)u,\ k_1) = \frac{(1+k)\sin\operatorname{am} u}{\cos\operatorname{am} u\ \Delta\operatorname{am} u},\quad k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},\quad (1+k)(1+k'_1) = 2,\quad k = \frac{1-k'_1}{1+k'_1}.$

$\sin\operatorname{am}(u,\ k) = 2\sin\operatorname{am}\left(\frac{(1+k')u}{2},\ \frac{1-k'}{1+k'}\right) : \left[(1+k')+(1-k')\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{(1+k')u}{2},\ \frac{1-k'}{1+k'}\right)\right].$

(42) $\sin^2\operatorname{am}\left[\frac{(1+\sqrt{k'})^2u}{2},\ \left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2\right] = \frac{1+\sqrt{k'}}{(1-\sqrt{k})^2}\ \frac{1-\Delta\operatorname{am} u}{1+\Delta\operatorname{am} u}\ \frac{\Delta\operatorname{am} u-k'}{\Delta\operatorname{am} u+k'}.$

(43) $\sin\operatorname{am} u+K+\tfrac{1}{2}iK' = \frac{1}{\sqrt{k}}\ \frac{1+\sqrt{k}-(1-\sqrt{k})\sin\operatorname{am}(\frac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\ k_1)}{1+\sqrt{k}+(1-\sqrt{k})\sin\operatorname{am}(\frac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\ k_1)}.\qquad k_1 = \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2.$

Vergleicht man hier das Reelle mit dem Reellen, Imaginäres mit Imaginärem, so folgt:

(44) $\frac{2\sin(\frac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\ k_1)}{1-k_1\sin^2\operatorname{am}(\frac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\ k_1)} = \frac{i(1-k)\sin\operatorname{am} u}{1-k\sin^2\operatorname{am} u}.$

(45) $\frac{\cos\operatorname{am} u\ \Delta\operatorname{am} u}{1-k\sin^2\operatorname{am} u} = \frac{1+k_1\sin^2\operatorname{am}(\frac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\ k_1)}{1-k_1\sin^2\operatorname{am}(\frac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\ k_1)},$

$\sin\operatorname{am}(\tfrac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\ k_1) = \frac{i(1+\sqrt{k})^2\sin\operatorname{am} u}{1+\cos\operatorname{am} u\ \Delta\operatorname{am} u-k\sin^2\operatorname{am} u}.\quad \frac{\cos\operatorname{am} u\ \Delta\operatorname{am} u}{1-k\sin^2\operatorname{am} u} = Q$ gesetzt, folgt noch

$\cos\operatorname{am}(\tfrac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\ k_1) = \frac{1+k_1-(1-k_1)Q}{k_1(1+Q)} = 1+\frac{1}{k_1}\ \frac{1-Q}{1+Q},$

$\Delta^2\operatorname{am}(\tfrac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\ k_1) = \frac{(1+k_1)+(1-k_1)Q}{1+Q} = 1+k_1\frac{1-Q}{1+Q},$

$\sin^2(\tfrac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\ k_1) = -\frac{1}{k_1}\ \frac{1-Q}{1+Q}.$

Obgleich durch diese Transformation ein imaginäres Argument eingeführt wird, so kann sie doch von sehr grossem Nutzen sein. Ist nämlich $k > \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, so ist $k_1 < \left(\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}+1}\right)^2$, $q < 0{,}000\,007$, $q^2 <$ $0{,}000\,000\,000\,05$, so dass beim Rechnen mit zehnstelligen Logarithmentafeln q^2 schon vernachlässigt werden kann.

Addition und Subtraction.

Zur Abkürzung sei in den Formeln (46) bis (53)

$$\operatorname{am} u = a, \quad \operatorname{am} v = b, \quad \operatorname{am} u{+}v = \sigma, \quad \operatorname{am} u{-}v = \vartheta, \quad N = 1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b.$$

Dann ist:

(46) $\sin\sigma = (\sin a \cos b \,\Delta b + \sin b \cos a \,\Delta a) : N,$ $\quad \sin\vartheta = (\sin a \cos b \,\Delta b - \sin b \cos a \,\Delta a) : N.$

(47) $\cos\sigma = (\cos a \cos b - \sin a \sin b \,\Delta a \,\Delta b) : N,$ $\quad \cos\vartheta = (\cos a \cos b + \sin a \sin b \,\Delta a \,\Delta b) : N.$

(48) $\Delta\sigma = (\Delta a \Delta b - k^2 \sin a \sin b \cos a \cos b) : N,$ $\quad \Delta\vartheta = (\Delta a \Delta b + k^2 \sin a \sin b \cos a \cos b) : N.$

(49) $\cos\sigma = \cos a \cos b - \sin a \sin b \,\Delta\sigma,$ $\quad \cos\vartheta = \cos a \cos b + \sin a \sin b \,\Delta\vartheta.$

(50) $\sin\sigma + \sin\vartheta = 2 \sin a \cos b \,\Delta b : N,$ $\quad \sin\sigma - \sin\vartheta = 2 \cos a \,\Delta a \sin b : N.$

(51) $\cos\sigma + \cos\vartheta = 2 \cos a \cos b : N,$ $\quad \cos\sigma - \cos\vartheta = -2 \sin a \sin b \,\Delta a \Delta b : N.$

(52) $\Delta\sigma + \Delta\vartheta = 2 \Delta a \Delta b : N,$ $\quad \Delta\sigma - \Delta\vartheta = -2k^2 \sin a \sin b \cos a \cos b : N.$

(53) $\sin\sigma \sin\vartheta = (\sin^2 a - \sin^2 b) : N, \quad 1 + \cos\sigma\cos\vartheta = (\cos^2 a + \cos^2 b) : N, \quad 1 + \Delta\sigma\Delta\vartheta = (\Delta^2 a + \Delta^2 b) : N.$

(54) $\sin^2 \operatorname{am} u = (1 - \cos \operatorname{am} 2u) : (1 + \Delta \operatorname{am} 2u),$ $\quad \cos^2 \operatorname{am} u = (\cos \operatorname{am} 2u - \Delta \operatorname{am} 2u) : (1 - \Delta \operatorname{am} 2u).$

Elliptische Integrale zweiter Gattung.

(55) $$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - x^2k^2}{1 - x^2}}\, dx, \quad E = E(\tfrac{1}{2}\pi, k), \quad E' = E(\tfrac{1}{2}\pi, k'),$$

$$E = K + \frac{\pi^2}{K} \frac{\partial}{\partial q} \lg (1 + 2 \sum_1^\infty m\, (-q)^{m^2}), \qquad EK' + KE' - KK' = \tfrac{1}{2}\pi.$$

(56) $$Z(u, k) = Z(u) = \frac{\partial}{\partial u} \lg \Theta_1^0(u) = u \frac{\Theta_1''^0(0)}{\Theta_1^0(0)} - k^2 \int_0^u \sin^2 \operatorname{am} u \, du,$$

$$= -\frac{uE}{K} + \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2x^2}{1 - x^2}}\, dx = \frac{KE(\varphi, k) - EF(\varphi, k)}{K} = \frac{u\, \Theta''^1_0(0)}{\Theta_0^1(0)} + \int_0^u \Delta^2 \operatorname{am} u.$$

(57) $$\int_0^K \sin^2 \operatorname{am} u \, du = \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} = \frac{K\, \Theta_1''^0(0)}{k^2\, \Theta_1^0(0)},$$

$$K \int_K^{K+iK'} k^2 \sin^2 \operatorname{am} du - iK' \int_0^K k^2 \sin^2 \operatorname{am} du = \tfrac{1}{2} i\pi.$$

(58) $$k^2 \int \sin^2 \operatorname{am} u \, du - \int \frac{du}{\sin^2 \operatorname{am} u} = \frac{\cos \operatorname{am} u \,\Delta \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u}.$$

(59) $$\frac{d \sin^m \operatorname{am} u}{du} = m \sin^{m-1} \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \,\Delta \operatorname{am} u =$$

$$m(m-1) \int \sin^{m-2} \operatorname{am} u \, du - m^2(1 + k^2) \int \sin^m \operatorname{am} u \, du + m(m+1) k^2 \int \sin^{m+2} \operatorname{am} u \, du.^{*)}$$

Periodicität.

(60) $$Z(u + 2K) = Z(u), \quad Z(u + 2iK') = Z(u) - \frac{i\pi}{K}, \quad Z(-u) = -Z(u).$$

---

*) Vergl. Crelle's Journal Bd. 81, pag. 81.

Werthe für specielle Argumente.

(61) $Z(2miK') = -\frac{mi\pi}{K}, \quad Z(iK') = \infty, \quad Z(mK) = 0, \quad Z(K+iK') = \frac{-i\pi}{2K}, \quad Z(\tfrac{1}{2}K) = \frac{1-k'}{2}.$

Addition und Transformation.

(62) $Z(u+v) = Z(u) + Z(v) - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v.$

(63) $i\,Z(iu) = -\operatorname{tg} \operatorname{am}(u, k')\, \Delta \operatorname{am}(u, k') + \frac{u\pi}{2KK'} + Z(u, k').$

Die Differentialquotienten der übrigen Θ-Functionen.

(64) $$\frac{\partial}{\partial u} \lg \Theta_0^0(u) = \frac{u\Theta_1''^0(0)}{\Theta_1^0(0)} - \int_0^u \frac{k^2 \cos^2 \operatorname{am} u}{\Delta^2 \operatorname{am} u} du = u\left(\frac{\Theta_1''^0(0)}{\Theta_1^0(0)} - 1\right) + \int_0^u \frac{k'^2\, du}{\Delta^2 \operatorname{am} u}.$$

(65) $$\frac{\partial}{\partial u} \lg \Theta_0^1(u) = \frac{u\Theta_1''^0(0)}{\Theta_1^0(0)} - \int_0^u \frac{\Delta^2 \operatorname{am} u\, du}{\cos^2 \operatorname{am} u} = \frac{u\,\Theta_0''^0(0)}{\Theta_0^0(0)} - \int_0^u \frac{k'^2\, du}{\cos^2 \operatorname{am} u}.$$

(66) $$\frac{\Theta_0''^0(0)}{\Theta_0^0(0)} = \frac{\Theta_1''^0(0)}{\Theta_1^0(0)} - k^2 = \frac{\Theta_0''^1(0)}{\Theta_0^1(0)} + k'^2, \qquad \frac{\partial \lg q}{\partial (k^2)} = \frac{\pi^2}{[illegible]}.$$

(67) $$\frac{\Theta_1''^0(0)}{\Theta_1^0(0)} = 1 - \frac{E}{K}, \quad E' = K' + \frac{\pi}{2K} - \frac{EK'}{K} = \frac{K'\Theta[illegible]}{\Theta_1^0([illegible])} + [illegible]$$

(68) $$E = \Theta_0''^1(0) : \Theta_0^1(0), \quad K^2\Theta_1''^0(0) = -\pi^2 \sum_1^\infty{}_{(m)} (-q)^{m^2} m^2, \qquad [illegible]''(0) = -\pi^2 \sum_1^\infty{}_{(m)} m^2 q^{m^2}.$$

Elliptische Integrale dritter Gattung.

(69) $$\Pi(u, v, k) = \Pi(u, v) = u\,Z(v) + \tfrac{1}{2}\lg \frac{\Theta_1^0(u-v)}{\Theta_1^0(u+v)} = \int_0^x \frac{ak^2\sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)}\, x^2\, dx}{(1-a^2k^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$= \int_0^u \frac{k^2 \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v\, \Delta \operatorname{am} v \sin^2 \operatorname{am} u\, du}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} v \sin^2 \operatorname{am} u}. \qquad a = \sin \operatorname{am} v.$$

(70) $\Pi(K, v) = K\,Z(v), \quad \Pi(2iK', v) = 2iK'Z(v) + vi\pi : K, \quad \Pi(u, K) = 0, \quad \Pi(u, K+iK') = 0.$

(71) $\Pi(u+2K, v) = \Pi(u, v) + 2K\,Z(v), \quad \Pi(u, v+2K) = \Pi(u, v), \quad \Pi(u, v+2iK') = \Pi(u, v),$
$$\Pi(u+2iK', v) = \Pi(u, v) + 2\Pi(K+iK', v) - 2\Pi(K, v)$$
$$= \Pi(u, v) + 2\int_K^{K+iK'} \frac{k^2 \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v\, \Delta \operatorname{am} v \sin^2 \operatorname{am} u\, du}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} v \sin^2 \operatorname{am} u}.$$

(72) $K\,\Pi(K+iK', v) - (K+iK')\,\Pi(K, v) = \tfrac{1}{2}i\pi v,$

(73) $\Pi(u, v) - \Pi(v, u) = v\,Z(u) - u\,Z(v).$

(74) $$\Pi(u+t, v) - \Pi(u, v) - \Pi(t, v) = \tfrac{1}{2}\lg \frac{1 + k^2 \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} t \sin \operatorname{am} v \sin \operatorname{am} \overline{u+t+v}}{1 - k^2 \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} t \sin \operatorname{am} v \sin \operatorname{am} \overline{u+t-v}}.$$

(75) $$\Pi(u, v+w) - \Pi(u, v) - \Pi(u, w) + k^2 u \sin \operatorname{am} v \sin \operatorname{am} w \sin \operatorname{am} \overline{v+w}$$
$$= \tfrac{1}{2}\lg \frac{1 + k^2 \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \sin \operatorname{am} w \sin \operatorname{am} \overline{u+v+w}}{1 - k^2 \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \sin \operatorname{am} w \sin \operatorname{am} \overline{v+w-u}}.$$

(76) $\Pi(iu, iv+K) = \Pi(u, v+K', k'), \quad \Pi(iu, v+K) = -\Pi(u, iv+K', k').$

Liegt a zwischen 0 und 1, so setzt man am besten $a = \sin \operatorname{am} v$, liegt a zwischen 1 und $1 : k$, so setzt man $a = \sin \operatorname{am} \overline{iv+K}$, liegt a zwischen $1 : k$ und ∞, so setzt man $a = \sin \operatorname{am} \overline{v+iK'}$. Ist a rein imaginär, setzt man $a = \sin \operatorname{am} iv$. Andere Formen von Integralen dritter Gattung sind (nach Jacobi):

$$(77)\quad \int_0^x \frac{k^2 a\sqrt{1-a^2}\, x^2\, dx}{\sqrt{1-k^2a^2}\,(1-k^2a^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = -u\frac{\partial}{\partial v}\lg\Theta_0^0(v) - \tfrac{1}{2}\lg\frac{\Theta_1^0(u-v)}{\Theta_1^0(u+v)},$$

$$(78)\quad \int_0^x \frac{a\sqrt{1-a^2k^2}\,(1-k^2x^2)\, du}{\sqrt{1-a^2}\,(1-k^2a^2x^2)} = -u\frac{\partial}{\partial v}\lg\Theta_0^1(v) - \tfrac{1}{2}\lg\frac{\Theta_1^0(u-v)}{\Theta_1^0(u+v)},$$

$$(79)\quad \int_0^x \frac{\sqrt{(1-a^2)(1-a^2k^2)}\, du}{a(1-k^2a^2x^2)} = u\frac{\partial}{\partial v}\lg\Theta_1^1(v) + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\Theta_1^0(u-v)}{\Theta_1^0(u+v)},$$

$$(80)\quad \int_0^x \frac{a\sqrt{(1-a^2)(1-a^2k^2)}\, du}{a^2-x^2} = -u\,Z(v) + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\Theta_1^1(v+u)}{\Theta_1^1(v-u)},$$

$$(81)\quad \int_0^x \frac{a\sqrt{1-a^2}\,(1-k^2x^2)\, du}{\sqrt{1-k^2a^2}\,(a^2-x^2)} = -u\frac{\partial}{\partial v}\lg\Theta_0^0(v) + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\Theta_1^1(v+u)}{\Theta_1^1(v-u)},$$

$$(82)\quad \int_0^x \frac{a\sqrt{1-k^2a^2}}{\sqrt{1-a^2}\,(a^2-x^2)}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}\,dx = -u\frac{\partial}{\partial v}\lg\Theta_0^1(v) + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\Theta_1^1(v+u)}{\Theta_1^1(v-u)},$$

$$(83)\quad \int_0^x \frac{\sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)}}{a(a^2-x^2)}\,x^2\, du = -u\frac{\partial}{\partial v}\lg\Theta_1^1(v) + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\Theta_1^1(v+u)}{\Theta_1^1(v-u)}.$$

$$(84)\quad \Theta_0^0(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},\quad \Theta_1^0(0) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}},\quad \Theta_0^1(0) = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}},\quad \Theta_1'^1(0) = \sqrt{\frac{2Kkk'}{\pi}}.$$

$$(85)\quad \Theta_g^h(u+2mK) = (-1)^{mh}\,\Theta_g^h(u),\qquad \Theta_g^h(u+2miK') = (-1)^{mg}\,q^{-m^2}\,e^{-\frac{mui\pi}{K}}\,\Theta_g^h(u).$$

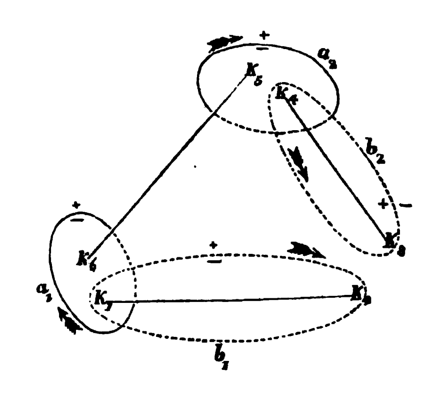
$$(86)\quad \Theta_{g+2m}^{h+2n}(u) = (-1)^{mh}\,\Theta_g^h(u),\qquad \Theta_g^h(u) = q^{\frac{h^2}{4}}.e^{\frac{hu\pi i}{2K}-\frac{1}{2}hgi\pi}\,\Theta\!\left(\frac{u\pi i}{2K}-\frac{h\pi K'}{2K}+\tfrac{1}{2}gi\pi\right).$$

$$(87)\quad \frac{\partial^2\Theta_g^h(u)}{\partial u^2} + \frac{\pi^2}{K^2}\frac{\partial\Theta_g^h}{\partial\lg q} = 0.\quad (88)\ d\arcsin(\sin\operatorname{am}u) = \Delta\operatorname{am}u\,du.\quad (89)\ d\arcsin(k\sin\operatorname{am}u) = \cos\operatorname{am}u\,du.$$

Formeln, welche bei Anwendung der Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden.

Die Riemann'sche Fläche.

Die Rosenhain'schen Functionen und Integrale können als Functionen des Ortes einer Riemann'schen die x-Ebene überall doppelt bedeckenden Fläche mit sechs Verzweigungspuncten k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 angesehen werden. Längs der drei graden Verbindungslinien k_1k_2, k_3k_4, k_5k_6 mögen die Blätter zusammmenhängen, oder wie man auch sagt, sich in einander fortsetzen. Diese Fläche kann auf unzählige Arten in eine einfach zusammenhängende durch Querschnitte zerlegt werden. Wir wählen die folgende Art. Wir ziehen zuerst einen in sich zurücklaufenden Querschnitt a_2, der die Verzweigungspuncte k_1 k_6 umkreist, und zwar soll er im obern Blatt



anfangen, über die Linie $k_5 k_6$ hinweg ins untere Blatt gelangen, und von dort über die Linie $k_1 k_2$ hinweg ins obere Blatt zum Anfange zurückkehren. Dabei soll das zur Linken liegende Ufer (also, für einen auf die beistehende Figur Sehenden, das äussere Ufer) das positive sein. Von einem Puncte des positiven Ufers im untern Blatte (alle Linien im unteren Blatte sind in der Figur punctirt gezeichnet) ziehen wir um $k_1 k_2$ herum, aber immer im untern Blatte bleibend, einen zweiten Querschnitt b_1 zu dem dem Anfangspuncte auf dem negativen Ufer von a_1 gegenüberliegenden Puncte zurück, wobei wieder das linke Ufer das positive sein soll. Ein zweites ganz ähnliches System von zwei Querschnitten $a_2 b_2$ ziehen wir mit Benutzung der Puncte $k_3\ k_4\ k_5$, so wie es die Figur hinlänglich deutlich anzeigt. In der Figur sind die positiven und negativen Ufer durch ein $+$ und ein $-$ Zeichen und die Richtungen durch Pfeile angedeutet. Durch die beiden Systeme ist die Fläche allerdings noch nicht in eine einfach zusammenhängende verwandelt worden, es gehört hierzu noch eine (von Riemann mit c bezeichnete) Verbindungslinie zwischen beiden Systemen. Da aber alle Integrale einwerthiger Functionen dieser Fläche beim Uebergang über diese Linie sich stetig ändern, so ist sie, als hier unwesentlich, fortgelassen worden.

Wenn man einen Punct von k_1 aus über $k_2\ k_3 \ldots k_6$ nach k_1 immer im obern Blatt und auf der linken Seite von $k_1 k_2$, $k_3 k_4$, $k_5 k_6$ bleibend zurückführt, so wird kein Querschnitt getroffen.

Integrale erster Gattung.

Durch ein zusammengehöriges Werthepaar von x und $s = \sqrt{(x-k_1)(x-k_2)(x-k_3)(x-k_4)(x-k_5)(x-k_6)}$ ist ein Punct der Fläche bestimmt, und umgekehrt gehört zu jedem Punct der Fläche ein einziges Werthepaar (x, s). Die beiden überall endlichen Integrale, aus denen alle übrigen Integrale erster Gattung linear mit constanten Coefficienten zusammengesetzt werden können, sind:

$$(90)\quad w_1(x, s) = w_1 = \int \frac{dx}{s}, \quad w_2(x, s) = w_2 = \int \frac{x\,dx}{s},$$

ihre Periodicitätsmoduln seien bez. $A_{1\nu}\ A_{2\nu}$ bei a_ν; $B_{1\nu}\ B_{2\nu}$ bei b_ν. Dann ist:

$$(91)\quad \begin{cases} \int_{k_1}^{k_2} dw_1 = \tfrac{1}{2} A_{11}, & \int_{k_6}^{k_1} dw_1 = -\tfrac{1}{2} B_{11}, \quad \int_{k_3}^{k_4} dw_1 = -\tfrac{1}{2} A_{12}, \quad \int_{k_5}^{k_6} dw_1 = -\tfrac{1}{2} B_{12}, \\ \int_{k_1}^{k_2} dw_2 = \tfrac{1}{2} A_{21}, & \int_{k_6}^{k_1} dw_2 = -\tfrac{1}{2} B_{21}, \quad \int_{k_3}^{k_4} dw_2 = -\tfrac{1}{2} A_{22}, \quad \int_{k_5}^{k_6} dw_2 = -\tfrac{1}{2} B_{22}. \end{cases}$$

Dabei sind die Integrale im obern Blatte und auf den linken Ufern der Linien $k_1 k_2$, $k_3 k_4$, $k_5 k_6$, (wenn diese in der Richtung, wie sie hier geschrieben sind, gedacht werden) genommen.

Man sieht leicht ein, dass die Werthe von w_1 und w_2 in den *Verzweigungspuncten* $k_1 \ldots k_6$ ganzen Vielfachen halber Periodicitätsmoduln gleich sind, also dass dort, unter $h\ g$ ganze positive oder negative Zahlen verstanden,

$$(92)\quad w_1 = \tfrac{1}{2} h_1 B_{11} + \tfrac{1}{2} h_2 B_{12} + \tfrac{1}{2} g_1 A_{11} + \tfrac{1}{2} g_2 A_{12}, \quad w_2 = \tfrac{1}{2} h_1 B_{21} + \tfrac{1}{2} h_2 B_{22} + \tfrac{1}{2} g_1 A_{21} + \tfrac{1}{2} g_2 A_{22}$$

ist. Bei der Behandlung der Rosenhain'schen Functionen nach Riemann's Methode ist es von wesentlichem Vortheil, die Anfangswerthe von $w_1\ w_2$ so zu bestimmen, dass für jeden Verzweigungswerth k_λ

$$(93)\quad h_1^\lambda g_1^\lambda + h_2^\lambda g_2^\lambda \equiv 1 \pmod{2}$$

ist, wenn h_1^λ, λ_2^λ, g_1^λ, g_2^λ die aus der Gleichung (92) genommenen Werthe von $h_1\ h_2\ g_1\ g_2$ sind, nachdem dort für $w_1\ w_2$ ihre Werthe im Puncte $x = k_\lambda$, $s = 0$, oder kurz im Puncte k_λ genommen werden. Diese Bezeichnungsweise wird für das Folgende beibehalten.

Bei dieser Wahl der Anfangswerthe ergeben sich für die Integrale $w_1\ w_2$ die Werthe:

$$
(94)\quad \begin{cases}
\text{Im Puncte } k_1\,, & k_2\,, & k_3\,, \\
\text{ist} & & \\
2w_1 = A_{12} - B_{12}, & A_{11} + A_{12} - B_{12}, & A_{11} + A_{12} + B_{11}, \\
2w_2 = A_{22} - B_{22}, & A_{21} + A_{22} - B_{22}, & A_{21} + A_{22} + B_{21}, \\
\text{Im Puncte } k_4\,, & k_5\,, & k_6\,, \\
\text{ist} & & \\
2w_1 = A_{11} + B_{11}, & A_{11} + B_{11} - B_{12}, & A_{12} + B_{11} - B_{12}, \\
2w_2 = A_{21} + B_{21}, & A_{21} + B_{21} - B_{22}, & A_{22} + B_{21} - B_{22}.
\end{cases}
$$

Es ist demnach beispielsweise in der zu (93) eingeführten Bezeichnung:

$$h_1^3 = 1, \quad h_2^3 = 0, \quad g_1^3 = 1, \quad g_2^3 = 1.$$

Zur Abkürzung werden die für Determinanten jetzt durch Herrn Kronecker so gebräuchlichen Bezeichnungen benutzt:

$$\begin{vmatrix} \tau_{11}, & \tau_{12} \\ \tau_{21}, & \tau_{22} \end{vmatrix} = |\,\tau\,|, \quad \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12} \\ A_{21}, & A_{22} \end{vmatrix} = |\,A\,|, \quad \begin{vmatrix} B_{11}, & B_{12} \\ B_{21}, & B_{22} \end{vmatrix} = |\,B\,|, \quad \alpha_{\mu\nu} = \frac{d \lg |\,A\,|}{d A_{\mu\nu}}.$$

Ferner sei:

$$(95)\quad u_1 = \alpha_{11} w_1 + \alpha_{21} w_2 = u_1(x, s), \quad u_2 = \alpha_{21} w_1 + \alpha_{22} w_2 = u_2(x, s),$$

$$\tau_{\mu\nu} = \alpha_{1\mu}\, B_{1\nu} + \alpha_{2\mu}\, B_{2\nu} = \tau_{\nu\mu} = \alpha_{1\nu}\, B_{1\mu} + \alpha_{2\nu}\, B_{2\mu},$$

woraus folgt:

$$(96)\quad w_1 = u_1 A_{11} + u_2 A_{12}, \quad w_2 = u_1 A_{21} + u_2 A_{22},$$

$$(97)\quad \begin{cases} B_{11} = \tau_{11} A_{11} + \tau_{21} A_{12}, & B_{12} = \tau_{12} A_{11} + \tau_{22} A_{12}, \\ B_{21} = \tau_{11} A_{21} + \tau_{21} A_{22}, & B_{22} = \tau_{12} A_{21} + \tau_{22} A_{22}. \end{cases}$$

Die Periodicitätsmoduln der Integrale u_1 u_2 sind bez.

$$(98)\quad \begin{cases} \text{Am Schnitt} & a_1, & a_2, & b_1\,, & b_2\,, \\ \text{ist der von } u_1 = & 1\,, & 0\,, & \tau_{11}, & \tau_{12}, \\ \phantom{\text{ist der }}\text{von } u_2 = & 0\,, & 1\,, & \tau_{21}, & \tau_{22}, \end{cases}$$

Die Werthe der Integrale u_1 u_2 in den Verzweigungpuncten sind:

$$(99)\quad u_1(k_\lambda, 0) = \tfrac12 h_1^\lambda \tau_{11} + \tfrac12 h_2^\lambda \tau_{12} + \tfrac12 g_1^\lambda, \quad u_2(k_\lambda, 0) = \tfrac12 h_1^\lambda \tau_{21} + \tfrac12 h_2^\lambda \tau_{22} + \tfrac12 g_2$$

worin h^λ g^λ dieselben Werthe als in (94) haben.

Die ϑ-Functionen mit zwei veränderlichen Argumenten.

Es sei:

$$(100)\quad \vartheta(v_1, v_2) = \vartheta(v) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} e^{i\pi(\tau_{11} m_1 m_1 + 2\tau_{12} m_1 m_2 + \tau_{22} m_2 m_2) + 2i\pi(m_1 v_1 + m_2 v_2)}$$

$$= \sum_{m_1} \sum_{m_2} e^{i\pi(\tau_{11} m_1 m_1 + 2\tau_{12} m_1 m_2 + \tau_{22} m_2 m_2)} \cos 2\pi(v_1 m_1 + v_2 m_2),$$

worin die beiden Summen über alle ganzzahligen m_1 m_2 von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken sind. Ferner sei

$$(101)\quad \vartheta\begin{matrix} h_1 & h_2 \\ g_1 & g_2 \end{matrix}(v_1, v_2) = \vartheta\begin{matrix} h_1 & h_2 \\ g_1 & g_2 \end{matrix}(v) = e^{\Omega}\, \vartheta(v_1 - \tfrac12 g_1 - \tfrac12 h_1 \tau_{11} - \tfrac12 h_2 \tau_{12}, \quad v_2 - \tfrac12 g_2 - \tfrac12 h_1 \tau_{21} - \tfrac12 h_2 \tau_{22})$$

worin zur Abkürzung:

$$\Omega = -i\pi(h_1 v_1 + h_2 v_2) + \tfrac14 (h_1 h_1 \tau_{11} + 2 h_1 h_2 \tau_{12} + h_2 h_2 \tau_{22}) + \tfrac12 i\pi(h_1 g_1 + h_2 g_2)$$

gesetzt ist. Man kann auch definiren:

$$(101^a)\quad \vartheta\begin{matrix} h_1 & h_2 \\ g_1 & g_2 \end{matrix}(v) =$$

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} e^{\frac14 i\pi[\tau_{11}(2m_1 - h_1)^2 + 2\tau_{12}(2m_1 - h_1)(2m_2 - h_2) + \tau_{22}(2m_2 - h_2)^2] + i\pi[(2m_1 - h_1)(v_1 - \frac12 g_1) + (2m_2 - h_2)(v_2 - \frac12 g_2)]}$$

$$= \sum_{m_1} \sum_{m_2} e^{\frac14 i\pi[\tau_{11}(2m_1 - h_1)^2 + 2\tau_{12}(2m_1 - h_1)(2m_2 - h_2) + \tau_{22}(2m_2 - h_2)^2]} \cos \Omega_{m_1 m_2},$$

worin zur Abkürzung:

$$\mathfrak{L}_{m_1, m_2} = \pi(v_1 - \tfrac{1}{2}g_1)(2m_1 - h_1) + \pi(v_2 - \tfrac{1}{2}g_2)(2m_2 - h_2)$$

gesetzt ist. Einfache Relationen zwischen ϑ-Functionen mit verschiedenen Indices sind:

$$(102)\quad \vartheta^{h_1,\, h_2}_{g_1,\, g_2}(v_1, v_2) = \vartheta^{h_1,\, h_2}_{0\;,\;0}(v_1 - \tfrac{1}{2}g_1, v_2 - \tfrac{1}{2}g_2), \quad \vartheta^{-h_1,\, -h_2}_{g_1,\, g_2}(v_1, v_2) = \vartheta^{h_1,\, h_2}_{g_1,\, g_2}(v_1, v_2),$$

$$(103)\quad \vartheta^{h_1+2m_1,\, h_2+2m_2}_{g_1+2n_1,\, g_2+2n_2}(v_1, v_2) = (-1)^{h_1 n_1 + h_2 n_2}\,\vartheta^{h_1,\, h_2}_{g_1,\, g_2}(v_1, v_2),$$

$$(104)\quad \vartheta^{h_1,\, h_2}_{g_1,\, g_2}(-v_1, -v_2) = \vartheta^{-h_1,\, -h_2}_{-g_1,\, -g_2}(v_1, v_2) = (-1)^{h_1 g_1 + h_2 g_2}\,\vartheta^{h_1,\, h_2}_{g_1,\, g_2}(v_1, v_2).$$

Ist:

$$(105)\quad h_1 g_1 + h_2 g_2 \equiv 0 \pmod{2},$$

so nennt man die ϑ-Function *gerade*, weil sie ungeändert bleibt, wenn $v_1\ v_2$ gleichzeitig in $-v_1$, $-v_2$ verwandelt werden. Ist aber

$$(106)\quad h_1 g_1 + h_2 g_2 \equiv 1 \pmod{2},$$

so wechselt die ϑ-Function mit $v_1\ v_2$ ihr Zeichen und heisst *ungerade*. Sämmtliche sechzehn ϑ-Functionen, die man erhält, wenn man für $h_1\ h_2\ g_1\ g_2$ die Zahlen 0 und 1 auf alle mögliche Weise einsetzt, sind reell, wenn die v reell und die τ rein imaginär sind. Sind $u_1\ u_2$ die oben bestimmten Integrale mit den oben bestimmten Anfangswerthen, so ist identisch:

$$(107)\quad \vartheta^{0\,0}_{0\,0}(u_1, u_2) = \vartheta(u_1, u_2) = 0.$$

Die Umkehrung der Integrale erster Gattung.

Die funfzehn übrigen ϑ-Functionen, die nicht identisch verschwinden, können zur Darstellung algebraischer Functionen von x und s dienen. Die Ausdrücke für jeden Quotienten je zweier unter ihnen fassen wir in der unter (108) folgenden Proportion zusammen, in der die achten Potenzen genommen sind, um die genaue Bestimmung von Wurzelvorzeichen zu vermeiden, die für ganz willkürliche Lagen der $k_1\ k_2 \ldots$ längere Auseinandersetzungen nöthig machen würde. Bei den in Anwendung kommenden Werthen der k ist die Bestimmung jener Vorzeichen nicht mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft. Die Proportion ist:

$$(108)\quad \begin{aligned} &(x-k_1)^4 (x-k_2)^4 : (x-k_1)^4 (x-k_3)^4 : (x-k_1)^4 (x-k_4)^4 \\ &: (x-k_1)^4 (x-k_5)^4 : (x-k_1)^4 (x-k_6)^4 : (x-k_2)^4 (x-k_3)_4 \\ &: (x-k_2)^4 (x-k_4)^4 : (x-k_2)^4 (x-k_5)^4 : (x-k_2)^4 (x-k_6)^4 \\ &: (x-k_3)^4 (x-k_4)^4 : (x-k_3)^4 (x-k_5)^4 : (x-k_3)^4 (x-k_6)^4 \\ &: (x-k_4)^4 (x-k_5)^4 : (x-k_4)^4 (x-k_6)^4 : (x-k_5)^4 (x-k_6)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \ &\vartheta^{0\,1}_{1\,0}(u)^8 \prod_\varrho^{1,2}(k_1-k_\varrho)^2(k_2-k_\varrho)^2 : \vartheta^{1\,1}_{1\,0}(u)^8 \prod_\varrho^{1,3}(k_1-k_\varrho)^2(k_3-k_\varrho)^2 : \vartheta^{1\,1}_{1\,1}(u)^8 \prod_\varrho^{1,4}(k_1-k_\varrho)^2(k_4-k_\varrho)^2 \\ &: \vartheta^{1\,0}_{1\,1}(u)^8 \prod_\varrho^{1,1}(k_1-k_\varrho)^2(k_5-k_\varrho)^2 : \vartheta^{1\,0}_{0\,0}(u)^8 \prod_\varrho^{1,6}(k_1-k_\varrho)^2(k_6-k_\varrho)^2 : \vartheta^{1\,1}_{0\,0}(u)^8 \prod_\varrho^{2,3}(k_2-k_\varrho)^2(k_3-k_\varrho)^2 \\ &: \vartheta^{1\,1}_{0\,1}(u)^8 \prod_\varrho^{2,4}(k_2-k_\varrho)^2(k_4-k_\varrho)^2 : \vartheta^{1\,0}_{0\,1}(u)^8 \prod_\varrho^{2,5}(k_2-k_\varrho)^2(k_5-k_\varrho)^2 : \vartheta^{1\,0}_{1\,0}(u)^8 \prod_\varrho^{2,6}(k_2-k_\varrho)^2(k_6-k_\varrho)^2 \\ &: \vartheta^{0\,0}_{0\,1}(u)^8 \prod_\varrho^{3,4}(k_3-k_\varrho)^2(k_4-k_\varrho)^2 : \vartheta^{0\,1}_{0\,1}(u)^8 \prod_\varrho^{3,5}(k_3-k_\varrho)^2(k_5-k_\varrho)^2 : \vartheta^{0\,1}_{1\,1}(u)^8 \prod_\varrho^{3,6}(k_3-k_\varrho)^2(k_6-k_\varrho)^2 \\ &: \vartheta^{0\,1}_{0\,0}(u)^8 \prod_\varrho^{4,5}(k_4-k_\varrho)^2(k_5-k_\varrho)^2 : \vartheta^{0\,1}_{1\,1}(u)^8 \prod_\varrho^{4,6}(k_4-k_\varrho)^2(k_6-k_\varrho)^2 : \vartheta^{0\,0}_{1\,1}(u)^8 \prod_\varrho^{5,6}(k_5-k_\varrho)^2(k_6-k_\varrho)^2 \end{aligned}$$

Hierin bedeutet $\prod_\varrho^{\mu\mu'}(k_\mu - k_\varrho)^2 (k_{\mu'} - k_\varrho)^2$ ein Product aus Factoren der Form $(k_\mu - k_\varrho)(k_{\mu'} - k_\varrho)$ die erhalten werden, wenn ϱ alle Werthe von 1 bis 6, *ausgenommen die Werthe* μ und μ', annimmt, so dass also vier solche Factoren gebildet werden. Ebenso soll $\prod_\varrho^{\mu} f_\varrho$ ein Produkt von Factoren f_ϱ be-

deuten, die alle erhalten werden, wenn ϱ die Zahlen 1 bis 6 ausgenommen die Zahl μ annimmt, so dass fünf Einzelfactoren vorhanden sind.

Da die Werthe der Integrale $u_1\, u_2$ in Verzweigungspuncten halben Periodicitätsmoduln gleich sind, so sieht man sofort, dass, wenn man statt der $u_1\, u_2$ Integrale $\int_{k_\mu, 0}^{x, s} du_1$, $\int_{k_\mu, 0}^{x, s} du_2$ einführt, man eine leichte Aenderung der Indices vornehmen, und einfache Exponentialfactoren hinzufügen muss, um wieder ϑ-Quotienten von der obigen Form zu erhalten, mit den Argumenten $\int_{k_\mu} du_1, \int_{k_\mu} du_2$. Von den Anfangswerthen, die unter (93) gewählt wurden, sind auch die folgenden Formeln frei:

$$(109)\qquad \frac{(x-k_1)^8}{\prod_\varrho^1 (k_1-k_\varrho)^2} : \frac{(x-k_2)^8}{\prod_\varrho^2 (k_2-k_\varrho)^2} : \frac{(x-k_3)^8}{\prod_\varrho^3 (k_3-k_\varrho)^2} : \frac{(x-k_4)^8}{\prod_\varrho^4 (k_4-k_\varrho)^2} : \frac{(x-k_5)^8}{\prod_\varrho^5 (k_5-k_\varrho)^2} : \frac{(x-k_6)^8}{\prod_\varrho^6 (k_6-k_\varrho)^2}$$

$$= \vartheta^{01}_{01}(2\int_{k_\mu} du)^8 : \vartheta^{01}_{11}(2\int_{k_\mu} du)^8 : \vartheta^{10}_{11}(2\int_{k_\mu} du)^8 : \vartheta^{10}_{10}(2\int_{k_\mu} du)^8 : \vartheta^{11}_{10}(2\int_{k_\mu} du)^8 : \vartheta^{11}_{01}(2\int_{k_\mu} du)^8.$$

Hierin ist k_μ ein völlig willkürlicher Verzweigungswerth und die obere Grenze, die fortgelassen ist, ist (x, s). Die 8te Potenz bezieht sich ebenso wie in (108) auf die Function nicht auf das Argument. Das Argument ist genauer geschrieben

$$(2\int_{k_\mu} du) = (2\int_{k_\mu, 0}^{x, s} du_1,\quad 2\int_{k_\mu, 0}^{x, s} du_2).$$

Zur Darstellung der Determinante $|A|$ durch ϑ-Functionen dient die Gleichung:

$$(110)\qquad (2\pi)^8\, \vartheta(0)^8 = (k_3-k_1)^2\,(k_5-k_1)^2\,(k_5-k_3)^2\,(k_4-k_2)^2\,(k_6-k_2)^2\,(k_6-k_4)^2\,|A|^4.$$

Das Additionstheorem.

Damit das Additionstheorem der Rosenhain'schen Functionen, das wir in Form einer Proportion schreiben, nicht gar zu viel Platz einnehme, und dadurch an Uebersichtlichkeit verliere, wollen wir ad hoc einige Abkürzungen einführen. Nämlich es sei:

$$\vartheta^{h_1,\, h_2}_{g_1,\, g_2}(v_1, v_2) = \vartheta^{h_1,\, h_2}_{g_1,\, g_2}(v) = \begin{bmatrix} h_1, & h_2 \\ g_1, & g_2 \end{bmatrix},$$

$$\vartheta^{h_1,\, h_2}_{g_1,\, g_2}(v_1', v_2') = \vartheta^{h_1,\, h_2}_{g_1,\, g_2}(v') = \begin{bmatrix} h_1, & h_2 \\ g_1, & g_2 \end{bmatrix}'.$$

Eine hingegen auch fernerhin anzuwendende abkürzende Bezeichnung ist

$$\vartheta^{h_1,\, h_2}_{g_1,\, g_2}(0, 0) = \vartheta^{h_1,\, h_2}_{g_1,\, g_2}(0) = \vartheta^{h_2,\, h_2}_{g_2,\, g_2},\ \vartheta^{00}_{00} = \vartheta.$$

Damit schreibt sich das Additonstheorem folgendermassen:

$$(111)\qquad \vartheta\,\vartheta\,\vartheta\,(v+v') : \vartheta\,\vartheta^{00}_{11}\,\vartheta^{00}_{11}(v+v') : \vartheta^{01}_{00}\,\vartheta^{11}_{11}\,\vartheta^{10}_{11}(v+v') : \vartheta\,\vartheta^{10}_{01}\,\vartheta^{10}_{01}(v+v') :$$

$$\vartheta^{10}_{01}\,\vartheta^{11}_{00}\,\vartheta^{01}_{01}(v+v') : \vartheta\,\vartheta^{01}_{00}\,\vartheta^{01}_{00}(v+v') : \vartheta\,\vartheta^{10}_{00}\,\vartheta^{10}_{00}(v+v') : \vartheta^{00}_{11}\,\vartheta^{10}_{01}\,\vartheta^{10}_{10}(v+v') :$$

$$\vartheta\,\vartheta^{01}_{10}\,\vartheta^{01}_{10}(v+v') : \vartheta^{00}_{11}\,\vartheta^{01}_{00}\,\vartheta^{01}_{11}(v+v') : \vartheta\,\vartheta^{00}_{10}\,\vartheta^{00}_{10}(v+v') : \vartheta^{01}_{10}\,\vartheta^{10}_{01}\,\vartheta^{11}_{10}(v+v') :$$

$$\vartheta^{10}_{00}\,\vartheta^{11}_{11}\,\vartheta^{11}_{11}(v+v') : \vartheta\,\vartheta^{11}_{00}\,\vartheta^{11}_{00}(v+v') : \vartheta^{01}_{00}\,\vartheta^{10}_{01}\,\vartheta^{11}_{01}(v+v') : \vartheta\,\vartheta^{00}_{01}\,\vartheta^{00}_{01}(v+v') =$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}' :$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}' :$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}' :$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}' :$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}' :$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}' :$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}' :$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}' :$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}' :$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}' :$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}' :$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}' :$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}' :$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}' :$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}' - \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}' :$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}' .$$

Multiplicirt man irgend ein Vorderglied dieser Proportion mit $\vartheta^{0\,0}_{0\,0}(v-v')$, so erhält man unmittelbar das entsprechende Hinterglied.

Berechnung der Periodicitätsmoduln und Integrale erster Gattung.

Setzt man:

$$(112)\qquad e^{i\pi\tau_{11}} = p,\quad e^{i\pi\tau_{22}} = q,\quad (e^{2i\pi\tau_{12}} + e^{-2i\pi\tau_{12}})\, e^{i\pi(\tau_{11}+\tau_{22})} = r,$$

$$(113)\quad \frac{1}{2}\,\frac{\vartheta^{0\,0}_{0\,0}(0)+\vartheta^{0\,0}_{0\,1}(0)-\vartheta^{0\,0}_{1\,0}(0)-\vartheta^{0\,0}_{1\,1}(0)}{\vartheta^{0\,0}_{0\,0}(0)+\vartheta^{0\,0}_{0\,1}(0)+\vartheta^{0\,0}_{1\,0}(0)+\vartheta^{0\,0}_{1\,1}(0)} = p_0,\quad \frac{1}{2}\,\frac{\vartheta^{0\,0}_{0\,0}(0)-\vartheta^{0\,0}_{0\,1}(0)+\vartheta^{0\,0}_{1\,0}(0)-\vartheta^{0\,0}_{1\,1}(0)}{\vartheta^{0\,0}_{0\,0}(0)+\vartheta^{0\,0}_{0\,1}(0)+\vartheta^{0\,0}_{1\,0}(0)+\vartheta^{0\,0}_{1\,1}(0)} = q_0,$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\vartheta^{0\,0}_{0\,0}(0)-\vartheta^{0\,0}_{0\,1}(0)-\vartheta^{0\,0}_{1\,0}(0)+\vartheta^{0\,0}_{1\,1}(0)}{\vartheta^{0\,0}_{0\,0}(0)+\vartheta^{0\,0}_{0\,1}(0)+\vartheta^{0\,0}_{1\,0}(0)+\vartheta^{0\,0}_{1\,1}(0)} = r_0,$$

so ist:

$$(114)\quad \begin{cases} p = p_0+2p_0(p_0^4+q_0^4+r_0^4)-p_0^3q_0^2r_0^2-r_0q_0^3-6r_0q_0^3(p_0^4+q_0^4+r_0^4)+p_1, \\ q = q_0+2q_0(p_0^4+q_0^4+r_0^4)-r_0p_0^3-p_0^2q_0^3r_0^2-6r_0p_0^3(p_0^4+q_0^4+r_0^4)+q_1, \\ r = r_0+2r_0(p_0^4+q_0^4+r_0^4)-p_0^2q_0^2r_0^3+r_1, \end{cases}$$

und es sind $p_1\ q_1\ r_1$ nach Potenzen von $p_0\ q_0\ r_0$ aufsteigende Reihen, deren geringste Dimension die neunte ist. Setzt man ferner:

$$(115)\quad \frac{\vartheta^{0\,0}_{0\,0}(v)+\vartheta^{0\,0}_{0\,1}(v)-\vartheta^{0\,0}_{1\,0}(v)-\vartheta^{0\,0}_{1\,1}(v)}{\vartheta^{0\,0}_{0\,0}(v)+\vartheta^{0\,0}_{0\,1}(v)+\vartheta^{0\,0}_{1\,0}(v)+\vartheta^{0\,0}_{1\,1}(v)} = P(v),\quad \frac{\vartheta^{0\,0}_{0\,0}(v)+\vartheta^{0\,0}_{1\,0}(v)-\vartheta^{0\,0}_{0\,1}(v)-\vartheta^{0\,0}_{1\,1}(v)}{\vartheta^{0\,0}_{0\,0}(v)+\vartheta^{0\,0}_{0\,1}(v)+\vartheta^{0\,0}_{1\,0}(v)+\vartheta^{0\,0}_{1\,1}(v)} = Q(v),$$

so ist:

$$(116)\qquad \cos 2\pi v_1 = \frac{1}{2p}P(v)+P_1,\quad \cos 2\pi v_2 = \frac{1}{2q}Q(v)+Q_1,$$

worin für reelle Werhe von v P_1 und Q_1 nur Glieder vierter und höherer Dimensionen von $p\ q\ r$ enthalten. Da die Formeln (114) und (116) wohl noch nirgends gegeben sind, so sollen sie am Schluss der Formelsammlung abgeleitet werden.

Die Grössen τ findet man aus den Gleichungen:

$$(117)\quad i\pi\tau_{11} = \lg p,\quad i\pi\tau_{22} = \lg q,\quad \tau_{12} = \tau_{21} = \frac{1}{2\pi}\arccos\frac{r}{2pq} = \frac{i}{2\pi}\lg\frac{r-\sqrt{r^2-4pq}}{2pq}.$$

Die Grössen $B_{11}\ B_{12}\ B_{21}\ B_{22}$ ergeben sich hieraus mittels der Formeln (97), die $A_{11}\ A_{12}\ A_{21}\ A_{22}$ hingegen müssen besonders berechnet werden. Dazu dienen die Differentialquotienten der ϑ-Functionen. Bedeutet in den Ausdrücken:

$$\frac{d\vartheta^{h_1,\,h_2}_{g_1,\,g_2}}{dv_1},\quad \frac{d\vartheta^{h_1,\,h_2}_{g_1,\,g_2}}{dv_2},$$

die Weglassung der Argumente, dass, nachdem die partiellen Differentialquotienten von $\vartheta^{h_1,\,h_2}_{g_1,\,g_2}(v_1\ v_2)$ bez. nach v_1, v_2 gebildet sind, für die Argumente v_1, v_2 die Null gesetzt worden ist, so erhalten wir zur Berechnung der A die Formeln:

$$(118)\quad 4\pi\frac{d\vartheta^{01}_{01}}{dv_1} = \sqrt[4]{\prod_{\varrho,\varrho'}^{1}(k_\varrho-k_{\varrho'})}\sqrt{|A|}\,(A_{11}k_1-A_{21}),\quad 4\pi\frac{d\vartheta^{01}_{01}}{dv_2} = \sqrt[4]{\prod_{\varrho,\varrho'}^{1}(k_\varrho-k_{\varrho'})}\sqrt{|A|}\,(A_{22}-A_{12}k_1),$$

$$(119)\quad 4\pi\frac{d\vartheta^{01}_{11}}{dv_1} = \sqrt[4]{\prod_{\varrho,\varrho'}^{2}(k_\varrho-k_{\varrho'})}\sqrt{|A|}\,(A_{11}k_2-A_{21}),\quad 4\pi\frac{d\vartheta^{01}_{11}}{dv_2} = \sqrt[4]{\prod_{\varrho,\varrho'}^{2}(k_\varrho-k_{\varrho'})}\sqrt{|A|}\,(A_{22}-A_{12}k_2),$$

$$(120)\quad 4\pi\frac{d\vartheta^{10}_{11}}{dv_1} = \sqrt[4]{\prod_{\varrho,\varrho'}^{3}(k_\varrho-k_{\varrho'})}\sqrt{|A|}\,(A_{11}k_3-A_{21}),\quad 4\pi\frac{d\vartheta^{10}_{11}}{dv_2} = \sqrt[4]{\prod_{\varrho,\varrho'}^{3}(k_\varrho-k_{\varrho'})}\sqrt{|A|}\,(A_{22}-A_{12}k_3),$$

$$(121)\quad 4\pi\frac{d\vartheta^{10}_{10}}{dv_1} = \sqrt[4]{\prod_{\varrho,\varrho'}^{4}(k_\varrho-k_{\varrho'})}\sqrt{|A|}\,(A_{11}k_4-A_{21}),\quad 4\pi\frac{d\vartheta^{10}_{10}}{dv_2} = \sqrt[4]{\prod_{\varrho,\varrho'}^{4}(k_\varrho-k_{\varrho'})}\sqrt{|A|}\,(A_{22}-A_{12}k_4),$$

$$(122)\quad 4\pi\frac{d\vartheta^{11}_{10}}{dv_1} = \sqrt[4]{\prod_{\varrho,\varrho'}^{5}(k_\varrho-k_{\varrho'})}\sqrt{|A|}\,(A_{11}k_5-A_{21}),\quad 4\pi\frac{d\vartheta^{11}_{10}}{dv_2} = \sqrt[4]{\prod_{\varrho,\varrho'}^{5}(k_\varrho-k_{\varrho'})}\sqrt{|A|}\,(A_{22}-A_{12}k_5),$$

$$(123)\quad 4\pi\frac{d\vartheta^{11}_{01}}{dv_1} = \sqrt[4]{\prod_{\varrho,\varrho'}^{6}(k_\varrho-k_{\varrho'})}\sqrt{|A|}\,(A_{11}k_6-A_{21}),\quad 4\pi\frac{d\vartheta^{11}_{01}}{dv_2} = \sqrt[4]{\prod_{\varrho,\varrho'}^{6}(k_\varrho-k_{\varrho'})}\sqrt{|A|}\,(A_{22}-A_{12}k_6).$$

Hierin bedeutet $\prod_{\varrho,\varrho'}^{\mu}(k_\varrho-k_{\varrho'})$ das Product aller Differenzen von je zwei der fünf Verzweigungspuncte $k_1\ k_2\ldots k_{\mu+1},\ k_{\mu+2}\ldots k_6$ (also von allen ausser k_μ). Da die Differenzen positiv oder negativ genommen werden können, und auch aus andern Gründen bleibt eine achte Wurzel der Einheit noch unbestimmt, welche für vorgegebene Lagen der k leicht bestimmt wird. Bei Vorzeichenbestimmungen ist es wichtig, die Anfangsglieder der ϑ-Functionen und deren Differentialquotienten zur Hand zu haben, weshalb sie hier folgen mögen:

$$(124)\quad \vartheta^{00}_{00}(v) = 1+p\cos 2\pi v_1+q\cos 2\pi v_2+\ldots,\quad \vartheta^{00}_{01}(v) = 1+p\cos 2\pi v_1-q\cos 2\pi v_2\ldots,$$

$$\vartheta^{00}_{10}(v) = 1-p\cos 2\pi v_2+q\cos 2\pi v_2+\ldots,\quad \vartheta^{00}_{11}(v) = 1-p\cos 2\pi v_1-q\cos 2\pi v_2+\ldots,$$

$$\vartheta^{01}_{00}(v) = 2\sqrt[4]{q}\cos\pi v_2+2p\sqrt[4]{q}\,\{e^{i\pi\tau_{12}}\cos(2\pi v_1+\pi v_2)+e^{-i\pi\tau_{12}}\cos(2\pi v_1-\pi v_2)\}+\ldots,$$

$$\vartheta^{10}_{00}(v) = 2\sqrt[4]{p}\cos\pi v_1+2q\sqrt[4]{p}\,\{e^{i\pi\tau_{12}}\cos(\pi v_1+2\pi v_2)+e^{-i\pi\tau_{12}}\cos(\pi v_1-2\pi v_2)\}+\ldots,$$

$$\vartheta^{11}_{00}(v) = 2\sqrt[4]{pq}\,\{e^{\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\cos\pi(v_1+v_2)+e^{-\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\cos\pi(v_1-v_2)\}+\ldots,$$

$$\vartheta^{01}_{01}(v) = 2\sqrt[4]{q}\sin\pi v_2+2p\sqrt[4]{q}\,\{e^{i\pi\tau_{12}}\sin(2\pi v_1+\pi v_2)-e^{-i\pi\tau_{12}}\sin(2\pi v_1-\pi v_2)\}+\ldots,$$

$$\vartheta^{10}_{01}(v) = 2\sqrt[4]{p}\cos\pi v_1-2q\sqrt[4]{p}\,\{e^{i\pi\tau_{12}}\cos(\pi v_1+2\pi v_2)+e^{-i\pi\tau_{12}}\cos(\pi v_1-2\pi v_2)\}+\ldots,$$

$$\vartheta^{11}_{01}(v) = 2\sqrt[4]{pq}\,\{e^{\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\sin\pi(v_1+v_2)-e^{-\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\sin\pi(v_1-v_2)\}+\ldots,$$

$$\vartheta^{01}_{10}(v) = 2\sqrt[4]{q}\cos\pi v_2-2p\sqrt[4]{q}\,\{e^{i\pi\tau_{12}}\cos(2\pi v_1+\pi v_2)+e^{-i\pi\tau_{12}}\cos(2\pi v_1-\pi v_2)\}+\ldots,$$

$$\vartheta^{10}_{10}(v) = 2\sqrt[4]{p}\sin\pi v_1+2q\sqrt[4]{p}\,\{e^{i\pi\tau_{12}}\sin(\pi v_1+2\pi v_2)+e^{-i\pi\tau_{12}}\sin(\pi v_1-2\pi v_2)\}+\ldots,$$

$$\vartheta^{11}_{10}(v) = 2\sqrt[4]{pq}\,\{e^{\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\sin\pi(v_1+v_2)-e^{-\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\sin\pi(v_1-v_2)\}+\ldots,$$

$$\vartheta^{01}_{11}(v) = 2\sqrt[4]{q}\sin\pi v_2-2p\sqrt[4]{q}\,\{e^{i\pi\tau_{12}}\sin\pi(2v_1+v_2)-e^{i\pi\tau_{12}}\sin\pi(2v_1-v_2)\}+\ldots,$$

$$\vartheta^{10}_{11}(v) = 2\sqrt[4]{p}\sin\pi v_1-2q\sqrt[4]{p}\,\{e^{i\pi\tau_{12}}\sin(\pi v_1+2\pi v_2)+e^{-i\pi\tau_{12}}\sin\pi(v_1-2v_2)\}+\ldots,$$

$$\vartheta^{11}_{11}(v) = -2\sqrt[4]{pq}\,\{e^{\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\cos\pi(v_1+v_2)-e^{-\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\cos\pi(v_1-v_2)\}+\ldots.$$

Da zur Bestimmung von $e^{i\pi\tau_{12}}$ die Grösse $r:pq = e^{2i\pi\tau_{12}}+e^{-2i\pi\tau_{12}}$, die unter (117) ausgerechnet ist, dient und hierdurch zwei Werthe, die einander reciprok sind, gefunden werden, so kann man sich des Quotienten $\vartheta^{11}_{00}:\vartheta^{11}_{11}$, welcher nahezu gleich $-(e^{\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}+e^{-\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}):(e^{\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}-e^{-\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}})$ ist, bedienen, zu entscheiden, welcher von beiden Werthen zu wählen ist. Hierzu bieten sich jedoch oft auch directe Mittel.

Nun folgen noch die Anfangsglieder der Differentialquotienten der ungeraden ϑ-Functionen:

$$(125)\quad \frac{d\vartheta^{01}_{01}(v)}{dv_1} = 4\pi p\sqrt[4]{q}\,\}e^{i\pi\tau_{12}}\cos(2v_1+v_2)\pi - e^{-i\pi\tau_{12}}\cos(2v_1-v_2)\pi\{+\ldots,$$

$$\frac{d\vartheta^{01}_{01}(v)}{dv_2} = 2\pi\sqrt[4]{q}\cos\pi v_2 + 4\pi p\sqrt[4]{q}\,\}e^{i\pi\tau_{12}}\cos(2\pi v_1+\pi v_2) + e^{-i\pi\tau_{12}}\cos(2\pi v_1-\pi v_2)\{+\ldots,$$

$$\frac{d\vartheta^{01}_{11}(v)}{dv_1} = -4\pi p\sqrt[4]{q}\,\}e^{i\pi\tau_{12}}\cos(2v_1+v_2)\pi - e^{-i\pi\tau_{12}}\cos(2\pi v_1-\pi v_2)\{+\ldots,$$

$$\frac{d\vartheta^{01}_{11}(v)}{dv_2} = 2\pi\sqrt[4]{q}\cos\pi v_2 - 4\pi p\sqrt[4]{q}\,\}e^{i\pi\tau_{12}}\cos(2\pi v_1+\pi v_2) + e^{-i\pi\tau_{12}}\cos(2\pi v_1-\pi v_2)\{+\ldots,$$

$$\frac{d\vartheta^{10}_{10}(v)}{dv_1} = 2\pi\sqrt[4]{p}\cos\pi v_1 + 4\pi q\sqrt[4]{p}\,\}e^{i\pi\tau_{12}}\cos(\pi v_1+2\pi v_2) + e^{-i\pi\tau_{12}}\cos(\pi v_1-2\pi v_2)\{+\ldots,$$

$$\frac{d\vartheta^{10}_{10}(v)}{dv_2} = 4\pi q\sqrt[4]{p}\,\}e^{i\pi\tau_{12}}\cos(v_1+2v_2)\pi - e^{-i\pi\tau_{12}}\cos(2v_1-v_2)\pi\{+\ldots,$$

$$\frac{d\vartheta^{10}_{11}(v)}{dv_1} = 2\pi\sqrt[4]{p}\cos\pi v_1 - 4\pi q\sqrt[4]{p}\,\}e^{i\pi\tau_{11}}\cos(\pi v_1+2\pi v_2) + e^{-i\pi\tau_{12}}\cos(\pi v_1-2\pi v_2)\{+\ldots,$$

$$\frac{d\vartheta^{10}_{11}(v)}{dv_2} = -4\pi q\sqrt[4]{p}\,\}e^{i\pi\tau_{12}}\cos(v_1+2v_2)\pi - e^{-i\pi\tau_{12}}\cos(2v_1\pi-v_2\pi)\{+\ldots,$$

$$\frac{d\vartheta^{11}_{01}(v)}{dv_1} = 2\pi\sqrt[4]{pq}\,\}e^{\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\cos(v_1+v_2)\pi - e^{-\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\cos(v_1-v_2)\pi\{+\ldots,$$

$$\frac{d\vartheta^{11}_{01}(v)}{dv_2} = 2\pi\sqrt[4]{pq}\,\}e^{\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\cos(v_1+v_2)\pi + e^{-\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\cos(v_1-v_2)\pi\{+\ldots,$$

$$\frac{d\vartheta^{11}_{10}(v)}{dv_1} = 2\pi\sqrt[4]{pq}\,\}e^{\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\cos(v_1+v_2)\pi + e^{-\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\cos(v_1-v_2)\pi\{+\ldots,$$

$$\frac{d\vartheta^{11}_{10}(v)}{dv_2} = 2\pi\sqrt[4]{pq}\,\}e^{\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\cos(v_1+v_2)\pi - e^{-\frac{1}{2}i\pi\tau_{12}}\cos(v_1-v_2)\pi\{+\ldots.$$

Integrale zweiter Gattung.

Bei der Darstellung der Integrale zweiter Gattung durch Integrale erster Gattung mittels ϑ-Functionen macht sich das Bedürfniss neuer Bezeichnungen geltend. Es sei:

$$(126)\quad \frac{d\lg\vartheta^{h_1 h_2}_{g_1 g_2}(v_1,\ v_2)}{dv_1} = Z^{h_1 h_2}_{g_1 g_2}(v_1,\ v_2) = Z^{h_1 h_2}_{g_1 g_2}(v),$$

$$\frac{d\lg\vartheta^{h_2 h_2}_{g_2 g_2}(v_1,\ v_2)}{dv_2} = I^{h_1 h_2}_{g_1 g_1}(v_1,\ v_2) = I^{h_1 h_2}_{g_1 g_2}(v),$$

$$(127)\quad \frac{dA_{1\mu}}{dk_\lambda} = A^{\lambda}_{1\mu},\quad \frac{dB_{1\mu}}{dk_\lambda} = B^{\lambda}_{1\mu},\ \text{also}$$

$$\tfrac{1}{2}A^{\lambda}_{11} = \int_{k_1}^{k_2}\frac{\frac{1}{2}dx}{(x-k_\lambda)s},\quad \tfrac{1}{2}B^{\lambda}_{11} = \int_{k_6}^{k_1}\frac{\frac{1}{2}dx}{(x-k_\lambda)s},\quad \tfrac{1}{2}A^{\lambda}_{12} = \text{etc.}$$

In dieser Bezeichnung ist nun, wenn $h^{\lambda}_1\ h^{\lambda}_2\ g^{\lambda}_1\ g^{\lambda}_2$ wie unter (93) genommen werden:

$$(128)\quad Z^{h_1^\lambda h_2^\lambda}_{g_1^\lambda g_2^\lambda}[u(x,\ s)+u(\xi,\ \sigma)]\,(\alpha_{11}+\alpha_{21}k_\lambda) + I^{h_1^\lambda h_2^\lambda}_{g_1^\lambda g_2^\lambda}[u(x,\ s)+u(\xi,\ \sigma)]\,(\alpha_{12}+\alpha_{22}k_\lambda)$$

$$= -\frac{2i\pi(\alpha_{1\varepsilon}+\alpha_{2\varepsilon}k_\lambda)}{\dfrac{d\tau_{1\varepsilon}}{dk_\lambda}}\,\frac{d[u_1(x,\ s)+u_1(\xi,\ \sigma)]}{dk_\lambda} = -\frac{2i\pi(\alpha_{1\varepsilon}+\alpha_{2\varepsilon}k_\lambda)}{\dfrac{d\tau_{2\varepsilon}}{dk_\lambda}}\,\frac{d[u_2(x,s)+u_2(\xi,\sigma)]}{dk_\lambda}$$

$$= -\frac{\prod\limits_{\varrho}^{\lambda}(k_\lambda-k_\varrho)}{2(\alpha_{11}+\alpha_{21}k_\lambda)}\,\frac{d[u_1(x,s)+u_1(\xi,\sigma)]}{dk_\lambda} = -\frac{\prod\limits_{\varrho}^{\lambda}(k_\lambda-k_\varrho)}{2(\alpha_{12}+\alpha_{22}k_\lambda)}\,\frac{d[u_2(x,s)+u_2(\xi,\sigma)]}{dk_\lambda}.$$

$$(129)\qquad \frac{d\tau_{\mu\nu}}{dk_\lambda} = \frac{4i\pi(\alpha_{1\mu}+\alpha_{2\mu}k_\lambda)\,(\alpha_{1\nu}+\alpha_{2\nu}k_\lambda)}{\prod\limits_\varrho^\lambda(k_\lambda-k_\varrho)}.$$

Hierin ist $\sigma = \sqrt{(\xi-k_1)(\xi-k_2)(\xi-k_3)(\xi-k_4)(\xi-k_5)(\xi-k_6)}$. Von den in $u_1\,u_2$ steckenden Anfangswerthen kann man sich auf zweierlei Weise befreien. Setzt man ξ einem von k_λ verschiedenen Verzweigungswerthe k_μ gleich, so folgt:

$$(130)\qquad Z^{h_1\lambda\,h_2\lambda}_{g_1\lambda\,g_2\lambda}\left(\int_{k_\mu}^{x,s}du\right)(\alpha_{11}+\alpha_{21}k_\lambda)+I^{h_1\lambda\,h_2\lambda}_{g_1\lambda\,g_2\lambda}\left(\int_{k_\mu}^{x,s}du\right)(\alpha_{12}+\alpha_{22}k_\lambda)$$

$$=-\frac{\prod\limits_\varrho^\lambda(k_\lambda-k_\varrho)}{2(\alpha_{11}+\alpha_{21}k_\lambda)}\frac{d}{dk_\lambda}\int_{k_\mu}^{x,s}du_1 = -\tfrac{1}{2}\prod_\varrho^\lambda(k_\lambda-k_\varrho)\left\{\int_{k_\mu}^{x,s}\frac{\tfrac{1}{2}\,dx}{(x-k_\lambda)s}-A^\lambda_{11}\int_{k_\mu}^{x,s}du_1-A^\lambda_{12}\int_{k_\mu}^{x,s}du_2\right\}.$$

Setzt man zweitens $(\xi,\sigma)=(x,s)$ so folgt:

$$(131)\qquad Z^{h_1\lambda\,h_2\lambda}_{g_1\lambda\,g_2\lambda}\left(2\int_{k_\mu}^{x,s}du\right)\frac{\alpha_{11}+\alpha_{21}k_\lambda}{\prod\limits_\varrho^\lambda(k_\lambda-k_\varrho)}+I^{h_1\lambda\,h_2\lambda}_{g_1\lambda\,g_2\lambda}\left(2\int_{k_\mu}^{x,s}du\right)\frac{\alpha_{12}+\alpha_{22}k_\lambda}{\prod\limits_\varrho^\lambda(k_\lambda-k_\varrho)}$$

$$=-\int_{k_\mu}^{x,s}\frac{\tfrac{1}{2}\,dx}{(x-k_\lambda)s}+A^\lambda_{11}\int_{k_\mu}^{x,s}du_1+A^\lambda_{12}\int_{k_\mu}^{x,s}du_2.$$

Zur Darstellung der Periodicitätsmoduln $A^\lambda_{11}\,A^\lambda_{12}$ durch ϑ-Functionen differenzirt man die Gleichung (130) nach x und erhält:

$$(132)\qquad \frac{d^2\lg\vartheta(u-u(k_\mu)-u(k_\lambda))}{du_1\,du_1}\,\frac{(\alpha_{11}+\alpha_{21}k_\lambda)\,(\alpha_{11}+\alpha_{21}x)}{\prod\limits_\varrho^\lambda(k_\lambda-k_\varrho)}+\frac{d^2\lg\vartheta(u-u(k_\mu)-u(k_\lambda))}{du_2\,du_2}\,\frac{(\alpha_{12}+\alpha_{22}k_\lambda)(\alpha_{22}+\alpha_{12}x)}{\prod\limits_\varrho^\lambda(k_\lambda-k_\varrho)}$$

$$+\frac{d^2\lg\vartheta(u-u(k_\mu)-u(k_\lambda)}{du_1\,du_2}\,\frac{(\alpha_{11}+\alpha_{21}k_\lambda)\,(\alpha_{12}+\alpha_{22}x)+(\alpha_{12}+\alpha_{22}k_\lambda)\,(\alpha_{11}+\alpha_{21}x)}{\prod\limits_\varrho^\lambda(k_\lambda-k_\varrho)}$$

$$=-\frac{1}{4(x-k_\mu)}+\tfrac{1}{2}A^\lambda_{11}(\alpha_{11}+\alpha_{21}x)+\tfrac{1}{2}A^\lambda_{12}(\alpha_{12}+\alpha_{22}x).$$

Wählt man nun, wenn λ gegeben ist, k_μ und $x=k_\nu$ so, dass

$$u_1(k_\nu)-u_1(k_\mu)-u_1(k_\lambda),\quad u_2(k_\nu)-u_2(k_\mu)-u_2(k_\lambda)\equiv 0{,}0$$

ist nach dem System gleichseitiger Periodicitätsmoduln der Integrale $u_1\,u_2$, und vertauscht man noch μ mit ν, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen sich $A^\lambda_{11}\,A^\lambda_{12}$ wie folgt ergeben:

$$(133)\qquad A^\lambda_{11}=\frac{A_{12}-A_{11}k_\lambda}{2(k_\mu-k_\lambda)(k_\nu-k_\lambda)}+2\frac{d^2\lg\vartheta}{dv_1\,dv_1}\,\frac{\alpha_{11}+\alpha_{21}k_\lambda}{\prod\limits_\varrho^\lambda(k_\lambda-k_\varrho)}+2\frac{d^2\lg\vartheta}{dv_1\,dv_2}\,\frac{\alpha_{12}+\alpha_{22}k_\lambda}{\prod\limits_\varrho^\lambda(k_\lambda-k_\varrho)},$$

$$(134)\qquad A^\lambda_{12}=\frac{-A_{22}+A_{21}k_\lambda}{2(k_\mu-k_\lambda)(k_\nu-k_\lambda)}+2\frac{d^2\lg\vartheta}{dv_1\,dv_2}\,\frac{\alpha_{11}+\alpha_{21}k_\lambda}{\prod\limits_\varrho^\lambda(k_\lambda-k_\varrho)}+\frac{d^2\lg\vartheta}{dv_2\,dv_2}\,\frac{\alpha_{12}+\alpha_{22}k_\lambda}{\prod\limits_\varrho^\lambda(k_\lambda-k_\varrho)},$$

worin $\frac{d^2\lg\vartheta}{dv_1\,dv_1},\ \frac{d^2\lg\vartheta}{dv_1\,dv_2}\ \frac{d\lg\vartheta}{dv_2\,dv_2}$ bedeuten soll, dass $\lg\vartheta(v_1,v_2)$ zuerst nach v_1, v_2 zu differenziren ist, und dann diese Argumente gleich Null zu setzen sind. Die Periodicitätsmoduln $B^\lambda_{11}, B^\lambda_{12}$ drücken sich durch $A^\lambda_{11}, A^\lambda_{12}$ und

die τ aus. Führt man nämlich in der Gleichung (130) x über die Querschnitte b_1, b_2 hinweg, so erhält man durch Vergleichung der Periodicitätsmoduln (oder auch aus 129)

$$(135)\quad B_{11}^{\lambda} = A_{11}^{\lambda}\tau_{11} + A_{12}^{\lambda}\tau_{21} + \frac{4\pi i(\alpha_{11}+\alpha_{21}k_\lambda)}{\prod_{\varrho}^{\lambda}(k_\lambda - k_\varrho)},$$

$$(136)\quad B_{12}^{\lambda} = A_{11}^{\lambda}\tau_{12} + A_{12}^{\lambda}\tau_{22} + \frac{4\pi i(\alpha_{12}+\alpha_{22}k_\lambda)}{\prod_{\varrho}^{\lambda}(k_\lambda - k_\varrho)}.$$

Dies sind die Formeln, die zur Berechnung der Integrale zweiter Gattung dienen. Es kommt jedoch bei den Anwendungen am häufigsten vor, dass ein Verzweigungspunct ins Unendliche fällt. Der Grenzübergang ist dann nicht so ganz einfach, weshalb die Formeln für diesen Fall noch besonders aufgestellt werden müssen. Es sollen aber in diesem Falle die Periodicitätsmoduln des Integrals $\int\frac{\frac{1}{2}x^2dx}{s}$ an den Schnitten a_1, a_2, b_1, b_2 bez. mit A_1^∞, A_2^∞, B_1^∞, B_2^∞ bezeichnet werden, und es soll $u_1(\infty) = \frac{1}{2}h_1^\infty\tau_{11} + \frac{1}{2}h_2^\infty\tau_{12} + \frac{1}{2}g_1^\infty$, $u_2(\infty) = \frac{1}{2}h_1^\infty\tau_{21} + \frac{1}{2}h_2^\infty\tau_{12} + \frac{1}{2}g_2$ gesetzt werden. Alsdann ist:

$$(137)\quad Z\begin{smallmatrix}h_1^\infty & h_2^\infty\\ g_1^\infty & g_2^\infty\end{smallmatrix}\left(2\int_{k_\mu}^{x,s}du\right)\alpha_{21} + I\begin{smallmatrix}h_1^\infty & h_2^\infty\\ g_1^\infty & g_2^\infty\end{smallmatrix}\left(2\int_{k_\mu}^{x,s}du\right)\alpha_{22} =$$

$$\int_{k_\mu}^{x,s}\frac{\frac{1}{2}x^2dx}{s} - A_1^\infty\int_{k_\mu}^{x,s}du_1 - A_2^\infty\int_{k_\mu}^{x,s}du_2,$$

$$(138)\quad A_1^\infty = +A_{21}\frac{k_\mu+k_\nu}{2} - A_{11}\frac{k_\mu k_\nu}{2} - 2\frac{d^2\lg\vartheta}{dv_1\,dv_2}\alpha_{21} - 2\frac{d^2\lg\vartheta}{dv_1\,dv_2}\alpha_{22},$$

$$(139)\quad A_2^\infty = A_{22}\frac{k_\mu+k_\nu}{2} - A_{12}\frac{k_\mu k_\nu}{2} - 2\frac{d^2\lg\vartheta}{dv_1\,dv_2}\alpha_{21} - 2\frac{d^2\lg\vartheta}{dv_2\,dv_2}\alpha_{22},$$

$$(140)\quad B_1^\infty = A_1^\infty\tau_{11} + A_2^\infty\tau_{12} - 4i\pi\alpha_{21},\quad B_2^\infty = A_1^\infty\tau_{21} + A_2^\infty\tau_{22} - 4i\pi\alpha_{22}.$$

Integrale dritter Gattung.

Die Periodicitätsmoduln des Integrales dritter Gattnng $\int\frac{dx}{(x-\xi)s}$ an den Schnitten a_1, a_2, b_1, b_2 sollen bez. mit A_1^ξ, A_2^ξ, B_1^ξ, B_2^ξ bezeichnet werden. Ferner sei ähnlich wie früher

$$\sigma = \sqrt{(\xi-k_1)(\xi-k_2)(\xi-k_3)(\xi-k_4)(\xi-k_5)(\xi-k_6)},\quad \text{dann ist:}$$

$$(141)\quad \lg\vartheta(u(\xi,\sigma) - 2u(x,s)) - \lg\vartheta(u(\xi,\sigma) + 2u(x,s))$$
$$= 2\sigma\int^{x,s}\frac{dx}{(x-\xi)s} - 2\sigma A_1^\xi u_1(x,s) - 2\sigma A_2^\xi u_2(x,s).$$

$$(142)\quad B_1^\xi = A_1^\xi\tau_{11} + A_2^\xi\tau_{21} + \frac{2i\pi u_1(\xi,\sigma)}{\sigma},$$

$$(143)\quad B_2^\xi = A_1^\xi\tau_{12} + A_2^\xi\tau_{22} + \frac{2\pi i u_2(\xi,\sigma)}{\sigma}.$$

Auf die Darstellung der in (141), (142), (143) vorkommenden Constanten (Periodicitätsmoduln) durch ϑ-Functionen wollen wir hier Verzicht leisten, da diese Darstellung im Folgenden nicht angewendet wird und complicirt ist. Man vergleiche hierüber eine Abhandlung von Roch in Crelle's Journal B. 65 Seite 42. Vielleicht ist es besser diese Fnnctionen als speciellen Fall (Grenzfall) der Integrale erster Gattung der nächsthöhern Classe der ultraelliptischen Functionen anzusehen.

Einige Bezeichnungen zwischen ϑ-Functionen.

$$(144)\quad \frac{d\vartheta^{01}_{01}}{dv_1}\frac{d\vartheta^{11}_{01}}{dv_2}-\frac{d\vartheta^{01}_{01}}{dv_2}\frac{d\vartheta^{11}_{01}}{dv_1}=\pi^2\vartheta^{00}_{10}\vartheta^{00}_{11}\vartheta^{01}_{10}\vartheta^{11}_{11},$$

$$(145)\quad \frac{d\vartheta^{01}_{11}}{dv_1}\frac{d\vartheta^{01}_{01}}{dv_2}-\frac{d\vartheta^{01}_{11}}{dv_2}\frac{d\vartheta^{01}_{01}}{dv_1}=\pi^2\vartheta^{10}_{00}\vartheta^{10}_{01}\vartheta^{11}_{00}\vartheta^{11}_{11},$$

$$(146)\quad \frac{d\vartheta^{10}_{11}}{dv_1}\frac{d\vartheta^{01}_{01}}{dv_2}-\frac{d\vartheta^{10}_{11}}{dv_2}\frac{d\vartheta^{01}_{01}}{dv_1}=\pi^2\vartheta^{00}_{00}\vartheta^{00}_{11}\vartheta^{01}_{00}\vartheta^{10}_{01},$$

$$(147)\quad \frac{d\vartheta^{10}_{10}}{dv_1}\frac{d\vartheta^{01}_{01}}{dv_2}-\frac{d\vartheta^{10}_{10}}{dv_2}\frac{d\vartheta^{01}_{01}}{dv_1}=\pi^2\vartheta^{00}_{10}\vartheta^{00}_{01}\vartheta^{10}_{01}\vartheta^{01}_{00},$$

$$(148)\quad \frac{d\vartheta^{11}_{10}}{dv_1}\frac{d\vartheta^{01}_{01}}{dv_2}-\frac{d\vartheta^{11}_{10}}{dv_2}\frac{d\vartheta^{01}_{01}}{dv_1}=\pi^2\vartheta^{00}_{00}\vartheta^{00}_{01}\vartheta^{01}_{10}\vartheta^{11}_{00},$$

$$(149)\quad \frac{d\vartheta^{10}_{11}}{dv_1}\frac{d\vartheta^{01}_{11}}{dv_2}-\frac{d\vartheta^{10}_{11}}{dv_2}\frac{d\vartheta^{01}_{11}}{dv_1}=\pi^2\vartheta^{00}_{01}\vartheta^{00}_{10}\vartheta^{10}_{01}\vartheta^{01}_{10},$$

$$(150)\quad \frac{d\vartheta^{10}_{10}}{dv_1}\frac{d\vartheta^{01}_{11}}{dv_2}-\frac{d\vartheta^{10}_{10}}{dv_2}\frac{d\vartheta^{01}_{11}}{dv_1}=\pi^2\vartheta^{00}_{00}\vartheta^{00}_{11}\vartheta^{01}_{10}\vartheta^{10}_{00},$$

$$(151)\quad \frac{d\vartheta^{11}_{10}}{dv_1}\frac{d\vartheta^{01}_{11}}{dv_2}-\frac{d\vartheta^{11}_{10}}{dv_2}\frac{d\vartheta^{01}_{11}}{dv_1}=\pi^2\vartheta^{00}_{10}\vartheta^{00}_{11}\vartheta^{01}_{00}\vartheta^{11}_{00},$$

$$(152)\quad \frac{d\vartheta^{01}_{11}}{dv_1}\frac{d\vartheta^{11}_{01}}{dv_2}-\frac{d\vartheta^{01}_{11}}{dv_2}\frac{d\vartheta^{11}_{01}}{dv_1}=\pi^2\vartheta^{00}_{00}\vartheta^{00}_{01}\vartheta^{01}_{00}\vartheta^{11}_{11},$$

$$(153)\quad \frac{d\vartheta^{10}_{10}}{dv_1}\frac{d\vartheta^{10}_{11}}{dv_2}-\frac{d\vartheta^{10}_{10}}{dv_2}\frac{d\vartheta^{10}_{11}}{dv_1}=\pi^2\vartheta^{11}_{00}\vartheta^{01}_{00}\vartheta^{01}_{10}\vartheta^{11}_{11},$$

$$(154)\quad \frac{d\vartheta^{11}_{10}}{dv_1}\frac{d\vartheta^{10}_{11}}{dv_2}-\frac{d\vartheta^{11}_{10}}{dv_2}\frac{d\vartheta^{10}_{11}}{dv_1}=\pi^2\vartheta^{00}_{00}\vartheta^{00}_{10}\vartheta^{10}_{00}\vartheta^{11}_{11},$$

$$(155)\quad \frac{d\vartheta^{10}_{11}}{dv_1}\frac{d\vartheta^{11}_{01}}{dv_2}-\frac{d\vartheta^{10}_{11}}{dv_2}\frac{d\vartheta^{11}_{01}}{dv_1}=\pi^2\vartheta^{10}_{00}\vartheta^{00}_{11}\vartheta^{00}_{01}\vartheta^{11}_{00},$$

$$(156)\quad \frac{d\vartheta^{10}_{10}}{dv_1}\frac{d\vartheta^{11}_{10}}{dv_2}-\frac{d\vartheta^{10}_{10}}{dv_2}\frac{d\vartheta^{11}_{10}}{dv_1}=\pi^2\vartheta^{00}_{00}\vartheta^{00}_{11}\vartheta^{10}_{01}\vartheta^{11}_{11},$$

$$(157)\quad \frac{d\vartheta^{10}_{01}}{dv_1}\frac{d\vartheta^{10}_{10}}{dv_2}-\frac{d\vartheta^{10}_{01}}{dv_2}\frac{d\vartheta^{10}_{10}}{dv_1}=\pi^2\vartheta^{00}_{10}\vartheta^{00}_{00}\vartheta^{10}_{01}\vartheta^{10}_{00},$$

$$(158)\quad \frac{d\vartheta^{11}_{10}}{dv_1}\frac{d\vartheta^{11}_{01}}{dv_2}-\frac{d\vartheta^{11}_{10}}{dv_2}\frac{d\vartheta^{11}_{01}}{dv_1}=\pi^2\vartheta^{10}_{01}\vartheta^{01}_{10}\vartheta^{01}_{00}\vartheta^{10}_{00},$$

$$(159)\quad \vartheta^{h_1 h_2}_{g_1 g_2}(v_1+m_1\tau_{11}+m_2\tau_{12}+n_1,\ v_2+m_1\tau_{21}+m_2\tau_{22}+n_2)=$$
$$(-1)^{h_1n_1+h_2n_2+g_1m_1+g_2m_2}\vartheta^{h_1 h_2}_{g_1 g_2}(v_1,\ v_2)e^{-i\pi(\tau_{11}m_1^2+2\tau_{12}m_1m_2+\tau_{22}m_2^2)-2i\pi(m_1v_1+m_2v_2)},$$

$$(160)\quad \frac{d^2\vartheta^{h_1 h_2}_{g_1 g_2}(v_1)}{dv_1\,dv_1}=4i\pi\frac{d\vartheta^{h_1 h_2}_{g_1 g_2}(v)}{d\tau_{11}},\quad \frac{d^2\vartheta^{h_1 h_2}_{g_1 g_2}(v)}{dv_2\,dv_2}=2i\pi\frac{d\vartheta^{h_1 h_2}_{g_1 g_2}(v)}{d\tau_{12}},$$
$$\frac{d^2\vartheta^{h_1 h_2}_{g_1 g_2}(v)}{dv_2\,dv_2}=4i\pi\frac{d\vartheta^{h_1 h_2}_{g_1 g_2}(v)}{d\tau_{22}}.$$

Setzt man:

$$)161)\quad \begin{aligned}
\overline{A_{11}}&=A_{11}\mathfrak{a}_{11}+A_{12}\mathfrak{a}_{12}+B_{11}\mathfrak{b}_{11}+B_{12}\mathfrak{b}_{12}, & \overline{B_{11}}&=A_{11}\mathfrak{c}_{11}+A_{12}\mathfrak{c}_{12}+B_{11}\mathfrak{d}_{11}+B_{12}\mathfrak{d}_{12},\\
\overline{A_{12}}&=A_{11}\mathfrak{a}_{21}+A_{12}\mathfrak{a}_{22}+B_{11}\mathfrak{b}_{21}+B_{12}\mathfrak{b}_{22}, & \overline{B_{12}}&=A_{11}\mathfrak{c}_{21}+A_{12}\mathfrak{c}_{22}+B_{11}\mathfrak{d}_{21}+B_{12}\mathfrak{d}_{22},\\
\overline{A_{21}}&=A_{21}\mathfrak{a}_{11}+A_{22}\mathfrak{a}_{12}+B_{21}\mathfrak{b}_{11}+B_{22}\mathfrak{b}_{12}, & \overline{B_{21}}&=A_{21}\mathfrak{c}_{11}+A_{22}\mathfrak{c}_{12}+B_{21}\mathfrak{d}_{11}+B_{23}\mathfrak{d}_{12},\\
\overline{A_{22}}&=B_{21}\mathfrak{a}_{21}+A_{22}\mathfrak{a}_{22}+B_{21}\mathfrak{b}_{21}+B_{22}\mathfrak{b}_{22}, & \overline{B_{22}}&=A_{21}\mathfrak{c}_{21}+A_{22}\mathfrak{c}_{22}+B_{21}\mathfrak{d}_{31}+B_{22}\mathfrak{d}_{22},
\end{aligned}$$

worin die ganzen positiven oder negativen Zahlen $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}$ so zu wählen sind, dass die Gleichungen

$$\text{(162)}\quad \begin{aligned} &\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{c}_{12}-\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{c}_{11}+\mathfrak{a}_{21}\mathfrak{c}_{22}-\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{c}_{21}=0, \quad \mathfrak{b}_{11}\mathfrak{d}_{12}-\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{d}_{11}+\mathfrak{b}_{21}\mathfrak{d}_{22}-\mathfrak{b}_{22}\mathfrak{d}_{21}=0,\\ &\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{d}_{12}-\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{d}_{11}+\mathfrak{a}_{21}\mathfrak{d}_{22}-\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{d}_{21}=0, \quad \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{d}_{11}-\mathfrak{b}_{11}\mathfrak{d}_{11}+\mathfrak{a}_{21}\mathfrak{d}_{21}-\mathfrak{b}_{21}\mathfrak{d}_{21}=1,\\ &\qquad\qquad \mathfrak{a}_{12}\mathfrak{d}_{12}-\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{d}_{12}+\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{d}_{22}-\mathfrak{b}_{22}\mathfrak{d}_{22}=1, \end{aligned}$$

erfüllt sind. Setzt man ferner:

$$\frac{d\lg|\overline{A}|}{d\overline{A}_{\nu\mu}}=\overline{\alpha}_{\nu\mu}, \quad \overline{u}_\mu=\overline{\alpha}_{1\mu}w_1+\overline{\alpha}_{2\mu}w_2, \quad \overline{\tau}_{\mu\nu}=\overline{\alpha}_{1\mu}\overline{B}_{1\nu}+\overline{\alpha}_{2\mu}\overline{B}_{2\nu}$$

$$\text{(163)}\quad \begin{aligned} \overline{h_1}&=h_1\mathfrak{a}_{11}+h_2\mathfrak{a}_{12}+g_1\mathfrak{b}_{11}+g_2\mathfrak{b}_{12}+\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{b}_{11}+\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{b}_{12},\\ \overline{h_2}&=h_1\mathfrak{a}_{21}+h_2\mathfrak{a}_{22}+g_1\mathfrak{b}_{21}+g_2\mathfrak{b}_{22}+\mathfrak{a}_{21}\mathfrak{b}_{21}+\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{b}_{22},\\ \overline{g_1}&=h_1\mathfrak{c}_{11}+h_2\mathfrak{c}_{12}+g_1\mathfrak{d}_{11}+g_2\mathfrak{d}_{12}+\mathfrak{c}_{11}\mathfrak{b}_{11}+\mathfrak{c}_{12}\mathfrak{b}_{12},\\ \overline{g_2}&=h_1\mathfrak{c}_{21}+h_2\mathfrak{c}_{22}+g_1\mathfrak{d}_{21}+g_2\mathfrak{d}_{22}+\mathfrak{c}_{21}\mathfrak{d}_{21}+\mathfrak{c}_{21}\mathfrak{d}_{22}, \end{aligned}$$

so hat man die Beziehung

$$\text{(164)}\quad \frac{\vartheta^{h_1\,h_2}_{g_1\,g_2}(u_1,\ u_2)}{\sqrt{|A|}}=\frac{\varepsilon\,.\,e^{-i\pi\sum\limits_{\varrho\varrho'}u_\varrho u_{\varrho'}\left(A_{1\varrho}\frac{d\lg|\overline{A}|}{dB_{1\varrho'}}+A_{2\varrho}\frac{d\lg|\overline{A}|}{dB_{2\varrho'}}\right)}\,\vartheta^{\overline{h_1}\,\overline{h_2}}_{\overline{g_1}\,\overline{g_2}}(\overline{u_1},\ \overline{u_2};\ \overline{\tau})}{\sqrt{|\overline{A}|}}$$

worin ε eine achte Wurzel der Einheit bedeutet. Ein Specialfall ist besonders zu beachten. Ist nämlich $\mathfrak{b}_{11}=1$, $\mathfrak{b}_{22}=1$, $\mathfrak{c}_{11}=-1$, $\mathfrak{c}_{22}=-1$ und sind alle übrigen $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}$ Null, so ist:

$$\overline{A_{11}}=B_{11},\ \overline{A_{12}}=B_{12},\ \overline{A_{21}}=B_{21},\ \overline{A_{22}}=B_{22},\ \overline{B_{11}}=-A_{11},\ \overline{B_{12}}=-A_{12},\ \overline{B_{21}}=-A_{21},\ \overline{B_{22}}=-A_{22},$$

$$|\overline{A}|=|B|,\ \overline{\tau_{11}}=-A_{11}\frac{d\lg|B|}{dB_{11}}-\frac{A_{21}d\lg|B|}{dB_{21}},$$

$$\overline{\tau_{12}}=-A_{11}\frac{d\lg|B|}{dB_{12}}-A_{21}\frac{d\lg|B|}{dB_{22}},\quad \overline{\tau_{22}}=-A_{12}\frac{d\lg|B|}{dB_{12}}-A_{22}\frac{d\lg|B|}{dB_{22}}$$

und daher:

$$\text{(165)}\quad \frac{\vartheta^{h_1\,h_2}_{g_1\,g_2}(u_1,\ u_2,\ \tau)}{\sqrt{|A|}}=\frac{e^{u_1^2\overline{\tau}_{11}+2u_1u_2\overline{\tau}_{12}+u_2^2\overline{\tau}_{22}}\,\vartheta^{g_1\,g_2}_{h_1\,h_2}(\overline{u_1},\ \overline{u_2},\ \overline{\tau})}{\sqrt{|B|}}$$

$$\overline{u_1}=\frac{d\lg|B|}{dB_{11}}w_1+\frac{d\lg|B|}{dB_{21}}w_2,\quad \overline{u_2}=\frac{d\lg|B|}{dB_{12}}w_1+\frac{d\lg|B|}{dB_{22}}w_2,$$

$$\overline{u_1}=-(u_1\overline{\tau}_{11}+u_2\overline{\tau}_{12}),\quad \overline{u_2}=-(u_1\overline{\tau}_{21}+u_2\overline{\tau}_{22}).$$

Wahl des Schnittnetzes.

Sind $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\ \infty$ die Verzweigungspuncte, so kann man die $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ auf verschiedene Arten auf $x_1 \ldots x_5\ \infty$ fallen lassen. Für die Anwendung ist es besonders wichtig zu untersuchen, wie sich die Formeln verschieden gestalten, jenachdem man k_1 oder $k_2 \ldots$ oder k_6 auf den Punct ∞ fallen lässt. Wir berücksichtigen deshalb vornehmlich sechs Arten die Querschnitte zu ziehen, indem wir einmal $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ bez. auf $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \infty$ oder bez. auf $x_2, x_3, x_4, x_5, \infty, x_1$ oder .... auf $\infty, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ fallen lassen. Es kommt das auf dasselbe hinaus als wenn man das Schnittnetz cyklisch verschiebt, indem bei der ersten Verschiebung der um $k_1\ k_2$ gezogene Querschnitt nun die Puncte $k_2\ k_3$ umkreist u. s. w. Man wird k_1 auf denjenigen von den Puncten $x_1, x_2, \ldots \infty$ fallen lassen, für welchen die ϑ-Reihe am besten convergirt, und womöglich so, dass die u reell werden, soweit sie bei den Anwendungen vorkommen. Man wird also dies Zusammenfallen so einrichten, dass die $p\ q\ r$ möglichst klein werden. Diese Werthe hängen aber nach den Gleichungen (113) (114) von den Werthen $\vartheta^{00}_{00}, \vartheta^{00}_{01}, \vartheta^{00}_{10}, \vartheta^{00}_{11}$ ab, und es ist deshalb vortheilhaft die Werthe dieser Grössen für die sechs Fälle anzugeben. Es ist in allen sechs Fällen:

$$\text{(166)}\quad \frac{(2\pi\vartheta)^8}{|A|^4}=L^2=(x_3-x_2)^2\,(x_5-x_1)^2\,(x_5-x_3)^2\,(x_4-x_2)^2.$$

Wenn aber k_1 auf $\varkappa_1$, k_1 auf $\varkappa_2$, k_1 auf $\varkappa_3$, k_1 auf $\varkappa_4$, k_1 auf $\varkappa_5$, k_1 auf ∞ fällt, so ist:

$$(167)\quad \left\{\begin{array}{lcllllll}
\left(\dfrac{2\pi\vartheta^{00}_{11}}{\sqrt{|A|}}\right)^8 & = & L_1^2, & L_2^2, & L_3^2, & L_4^2, & L_5^2, & L_6^2,\\
\left(\dfrac{2\pi\vartheta^{00}_{01}}{\sqrt{|A|}}\right)^8 & = & L_5^2, & L_6^2, & L_1^2, & L_2^2, & L_3^2, & L_4^2,\\
\left(\dfrac{2\pi\vartheta^{00}_{10}}{\sqrt{|A|}}\right)^8 & = & L_3^2, & L_4^2, & L_5^2, & L_6^2, & L_1^2, & L_2^2,
\end{array}\right.$$

worin

$$(168)\quad \left\{\begin{array}{ll}
L_1 = (\varkappa_4-\varkappa_2)(\varkappa_5-\varkappa_2)(\varkappa_5-\varkappa_4)(\varkappa_3-\varkappa_1), & L_2 = (\varkappa_2-\varkappa_1)(\varkappa_4-\varkappa_1)(\varkappa_4-\varkappa_2)(\varkappa_5-\varkappa_3),\\
L_3 = (\varkappa_3-\varkappa_2)(\varkappa_5-\varkappa_2)(\varkappa_5-\varkappa_3)(\varkappa_4-\varkappa_1), & L_4 = (\varkappa_2-\varkappa_1)(\varkappa_5-\varkappa_1)(\varkappa_5-\varkappa_2)(\varkappa_4-\varkappa_3),\\
L_5 = (\varkappa_4-\varkappa_1)(\varkappa_5-\varkappa_1)(\varkappa_5-\varkappa_4)(\varkappa_3-\varkappa_2), & L_6 = (\varkappa_3-\varkappa_1)(\varkappa_4-\varkappa_1)(\varkappa_4-\varkappa_3)(\varkappa_5-\varkappa_2),
\end{array}\right.$$

zu setzen ist.

Nun sollen die Formeln (114) und (116) begründet werden. Aus der Definition der ϑ-Functionen ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\vartheta^{00}_{00} &= 1+2p+2q+2r+2rp^3+2rq^3+2p^4+2q^4+2r^4-4r^2p^2q^2+2p^4q^4+A_{00}\\
\vartheta^{00}_{01} &= 1+2p-2q-2r-2rp^3+2rq^3+2p^4+2q^4+2r^4-4p^2q^2r^2+2p^4q^4+A_{01}\\
\vartheta^{00}_{10} &= 1-2p+2q-2r+2rp^3-2rq^3+2p^4+2q^4+2r^4-4p^2q^2r^2+2p^4q^4+A_{10}\\
\vartheta^{00}_{11} &= 1-2p-2q+2r-2rp^3-2rq^3+2p^5+2q^4+2r^4-4p^2q^2r^2+2p^4q^4+A_{11}
\end{aligned}$$

worin A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11} nach Potenzen von $p\ q\ r$ aufsteigende Reihen sind, deren Anfangsglied von der 7ten Dimension ist, von der neunten Dimension aber, wenn $r:pq$ keine erheblich grosse Zahl ist. Bildet man die Quotienten aus je zwei dieser Reihen, so werden diese Quotienten um so weniger von Eins verschieden sein, je kleiner die Grössen p, q, r sind. Umgekehrt, je weniger die Quotienten von Eins verschieden sind, um so besser werden die ϑ-Reihen convergiren. Sind $p\ q\ r$ kleine positive Grössen, und wäre $\vartheta^{00}_{11} > \vartheta^{00}_{10}$ so müsste $r-q > q-r$ oder $r > q$ sein. Man wird aber vor Allem suchen müssen, wenn nicht besondere Gründe dagegen sind, $r < p$, q zu machen, was dann geschieht, wenn $\vartheta^{00}_{11} < \vartheta^{00}_{01}$, ϑ^{00}_{10} ist. Aus diesem Gesichtspuncte sind die Querschnitte zu wählen. Kleine Modificationen treten dann ein, wenn eine oder beide Grössen p, q negativ reell sind. Aus dem obigen System von vier Gleichungen leiten sich drei Identitäten her:

$$2p(\vartheta^{00}_{01}-\vartheta^{00}_{00})+2q(\vartheta^{00}_{01}+\vartheta^{00}_{00})+2r(\vartheta^{00}_{01}+\vartheta^{00}_{00}) =$$
$$-2rp^3(\vartheta^{00}_{01}+\vartheta^{00}_{00})-2rq^3(\vartheta^{00}_{01}+\vartheta^{00}_{00})-(1+2p^4+2q^4+2r^4-4p^2q^2r^2+2p^4q^4)(\vartheta^{00}_{01}-\vartheta^{00}_{00})+A_{01}\vartheta^{00}_{00}-A_{00}\vartheta^{00}_{01},$$
$$2p(\vartheta^{00}_{10}+\vartheta^{00}_{00})+2q(\vartheta^{00}_{10}-\vartheta^{00}_{00})+2r(\vartheta^{00}_{10}+\vartheta^{00}_{00}) =$$
$$-2rp^3(\vartheta^{00}_{10}-\vartheta^{00}_{00})-2rq^3(\vartheta^{00}_{10}+\vartheta^{00}_{00})-(1+2p^4+2q^4+2r^4-4p^2q^2r^2+2p^4q^4)(\vartheta^{00}_{10}-\vartheta^{00}_{00})+A_{10}\vartheta^{00}_{00}-A_{00}\vartheta^{00}_{10},$$
$$2p(\vartheta^{00}_{11}+\vartheta^{00}_{00})+2q(\vartheta^{00}_{11}+\vartheta^{00}_{00})+2r(\vartheta^{00}_{11}-\vartheta^{00}_{00}) =$$
$$-2rp^3(\vartheta^{00}_{11}+\vartheta^{00}_{00})-2rq^3(\vartheta^{00}_{11}+\vartheta^{00}_{00})-(1+2p^4+2q^4+2r^4-4p^2q^2r^2+2p^4q^4)(\vartheta^{00}_{11}-\vartheta^{00}_{00})+A_{11}\vartheta^{00}_{11}-A_{00}\vartheta^{00}_{11}.$$

Beachtet man nun, dass:

$$\begin{vmatrix}
\vartheta^{00}_{01}-\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{01}+\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{01}+\vartheta^{00}_{00}\\
\vartheta^{00}_{10}+\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{10}-\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{10}+\vartheta^{00}_{00}\\
\vartheta^{00}_{11}+\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{11}+\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{11}-\vartheta^{00}_{00}
\end{vmatrix} = 4\vartheta\vartheta(\vartheta^{00}_{00}+\vartheta^{00}_{01}+\vartheta^{00}_{10}+\vartheta^{00}_{11}),$$

$$\begin{vmatrix}
\vartheta^{00}_{01}-\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{01}+\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{01}+\vartheta^{00}_{00}\\
\vartheta^{00}_{10}-\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{10}-\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{10}-\vartheta^{00}_{00}\\
\vartheta^{00}_{11}-\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{11}+\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{11}-\vartheta^{00}_{00}
\end{vmatrix} = -4\vartheta\vartheta(\vartheta^{00}_{00}+\vartheta^{00}_{01}-\vartheta^{00}_{10}-\vartheta^{00}_{11}),$$

$$\begin{vmatrix}
\vartheta^{00}_{01}-\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{01}-\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{01}+\vartheta^{00}_{00}\\
\vartheta^{00}_{10}+\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{10}-\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{10}+\vartheta^{00}_{00}\\
\vartheta^{00}_{11}+\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{11}-\vartheta^{00}_{00}, & \vartheta^{00}_{11}-\vartheta^{00}_{00}
\end{vmatrix} = -4\vartheta\vartheta(\vartheta^{00}_{00}-\vartheta^{00}_{01}+\vartheta^{00}_{10}-\vartheta^{00}_{11}),$$

$$\begin{vmatrix} \vartheta_{01}^{00}-\vartheta_{00}^{00}, & \vartheta_{01}^{00}+\vartheta_{00}^{00}, & \vartheta_{01}^{00}-\vartheta_{00}^{00} \\ \vartheta_{10}^{00}+\vartheta_{01}^{00}, & \vartheta_{10}^{00}-\vartheta_{00}^{00}, & \vartheta_{10}^{00}-\vartheta_{00}^{00} \\ \vartheta_{11}^{10}+\vartheta_{00}^{00}, & \vartheta_{11}^{00}+\vartheta_{00}^{00}, & \vartheta_{11}^{00}-\vartheta_{00}^{00} \end{vmatrix} = -4\vartheta\vartheta(\vartheta_{00}^{00}-\vartheta_{01}^{00}-\vartheta_{10}^{00}+\vartheta_{11}^{00}),$$

ist und behält man die unter (114) eingeführten Bezeichnungen $p_0\ q_0\ r_0$ bei, so folgt aus den obigen drei Identitäten:

$$2p = 2p_0(1+2p^4+2q^4+2r^4+2p^4q^4-4p^2q^2r^2)-2rq^3+2B_p$$
$$2q = 2q_0(1+2p^4+2q^4+2r^4+2p^4q^4-4p^2q^2r^2)-2rp^3+2B_q$$
$$2r = 2r_0(1+2p^4+2q^4+2r^4+2p^4q^4-4p^2q^2r^2)+2B_r,$$

worin B_p, B_q, B_r von der siebenten und von höhern Dimensionen sind. Da $4p_0q^4p^4$, $4q_0p^4q^4$, $4r_0p^4q^4$ von der 9ten Dimension sind, so sollen diese Grössen im Folgenden in B_p, B_q, B_r eingerechnet und also aus den Klammern fortgelassen werden. Setzt man einen Augenblick zur Abkürzung $p^4+q^4+r^4-2p^2q^2r^2 = R$ so kann man die erste der vorhergehenden Gleichungen schreiben

$$\begin{aligned} p = p_0+2p_0\,&[(p_0+2Rp_0-rq^3+B_p)^4+(q_0+2q_0R-rp^3+B_q)^4+(r_0+r_0R+B_p)^4 \\ &-2(p_0+2Rp_0-rq^3+B_p)^2\,(q_0+2Rq_0-rp^3+B_p)^2\,(r_0+2r^0R+B_r)] \\ &-r_0+r_0R+B_r)\,(q_0+2q_0R-rp^3+B_q)^3+B_p, \end{aligned}$$

$$p = p_0+2p_0(p_0{}^4+q_0{}^4+r_0{}^4)-r_0q_0{}^3+ \text{ Glieder 7ter und höherer Dimensionen,}$$

auf gleiche Weise erhält man:

$$q = q_0+2q_0(p_0{}^4+q_0{}^4+r_0{}^4)-r_0p_0{}^3+ \text{ Glieder 7ter und höherer Dimensionen,}$$
$$r = r_0+2r_0(p_0{}^4+q_0{}^4+r_0{}^4)+ \text{ Glieder 7ter und höherer Dimensionen.}$$

Darf man $r = pq(e^{2i\pi\tau_{11}}+e^{-2i\pi\tau_{12}})$ als von der 2ten Ordnung ansehen, so sind die vernachlässigten Glieder von der 9ten Dimension.

Die Gleichungen (116) erhält man in folgender Weise. Es ist:

$$\vartheta_{00}^{00}(v) = 1+2p\cos 2\pi v_1+2q\cos 2\pi v_2+2r\cos 2\pi v_1\cos 2\pi v_2-2r'\sin 2\pi v_1\sin 2\pi v_2+\varepsilon_{00}$$
$$\vartheta_{01}^{00}(v) = 1+2p\cos 2\pi v_1-2q\cos 2\pi v_2-2r\cos 2\pi v_1\cos 2\pi v_2+2r'\sin 2\pi v_1\sin 2\pi v_2+\varepsilon_{01}$$
$$\vartheta_{10}^{00}(v) = 1-2p\cos 2\pi v_1+2q\cos 2\pi v_2-2r\cos 2\pi v_1\cos 2\pi v_2+2r'\sin 2\pi v_1\sin 2\pi v_2+\varepsilon_{10}$$
$$\vartheta_{11}^{00}(v) = 1-2p\cos 2\pi v_1-2q\cos 2\pi v_2+2r\cos 2\pi v_1\cos 2\pi v_2-2r'\sin 2\pi v_1\sin 2\pi v_2+\varepsilon_{11}$$

worin $r' = pq(e^{2i\pi\tau_{12}}-e^{-2i\pi\tau_{12}})$ ist und $\varepsilon_{00}\ \varepsilon_{01}\ \varepsilon_{10}\ \varepsilon_{11}$ von der vierten Dimension in Bezug auf p, q, r, sind. Hieraus fliessen die drei Identitäten:

$$\begin{aligned} &2p\cos 2\pi v_1(\vartheta_{01}^{00}(v)-\vartheta_{00}^{00}(v))+2q\cos 2v_2\pi(\vartheta_{01}^{00}(v)+\vartheta_{00}^{00}(v))+2r\cos 2\pi v_1\cos 2\pi v_2(\vartheta_{01}^{00}(v)+\vartheta_{00}^{00}(v)) \\ &\qquad = 2r'\sin 2\pi v_1\sin 2\pi v_2(\vartheta_{01}^{00}(v)+\vartheta_{00}^{00}(v))+\varepsilon_{01}\vartheta_{00}^{00}(v)-\varepsilon_{00}\vartheta_{01}^{00}(v)), \\ &2p\cos 2\pi v_1(\vartheta_{10}^{00}(v)+\vartheta_{00}^{00}(v))+2q\cos 2\pi v_2(\vartheta_{10}^{00}(v)-\vartheta_{00}^{00}(v))+2r\cos 2v_1\pi\cos 2v_2\pi(\vartheta_{10}^{00}(v)+\vartheta_{00}^{00}(v)) \\ &\qquad = 2r'\sin 3\pi v_1\sin 2\pi v_2(\vartheta_{10}^{00}(v)+\vartheta_{00}^{00}(v))+\varepsilon_{10}\vartheta_{00}^{00}(v)-\varepsilon_{00}\vartheta_{10}^{00}(v)), \\ &2p\cos 2\pi v_1(\vartheta_{11}^{00}(v)+\vartheta_{00}^{00}(v))+2q\cos 2\pi v_2(\vartheta_{11}^{00}(v)+\vartheta_{00}^{00}(v))+2r\cos 2\pi v_1\cos 2\pi v_2(\vartheta_{11}^{00}(v)-\vartheta_{00}^{00}(v)) \\ &\qquad = 2r'\sin 2\pi v_1\sin 2\pi v_2(\vartheta_{11}^{00}(v)-\vartheta_{00}^{00}(v))+\varepsilon_{11}\vartheta_{00}^{00}(v)-\varepsilon_{00}\vartheta_{11}^{00}(v)). \end{aligned}$$

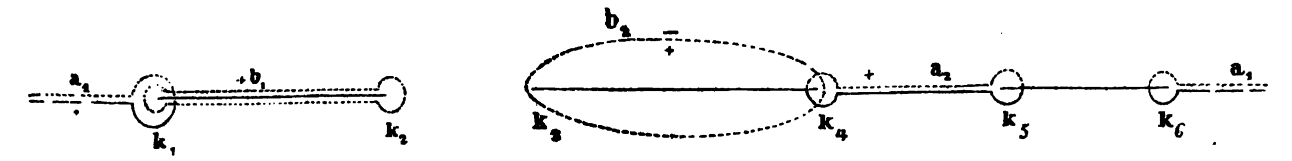
Betrachtet man hierin $2p\cos 2\pi v_1$, $2q\cos 2\pi v_2$, $2r\cos 2\pi v_1\cos 2\pi v_2$ als Unbekannte, und löst die Gleichungen auf, so ergeben sich die Gleichungen (116)

$$2p\cos 2\pi v_1 = P(v)+E_p, \quad 2q\cos 2\pi v_2+E_q$$

worin E_p, E_q für reelle v in Bezug auf $p\ q$ von der fünften Dimension sind.

Ehe wir nur zu den Anwendungen übergehen, fügen wir noch Weniges über die Abbildung der Riemann'schen im Vorhergehenden besprochenen Fläche durch das Integral u_1 hinzu, weil man meist gewöhnt ist nur die Abbildungen durch w_1 und w_2 zu zeichnen. Die Abbildung durch ein Integral u bietet aber gerade besonderes Interesse.

Es seien $k_1\ k_2\ k_3\ k_4\ k_5\ k_6$ reell und $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6$, so kann die auf Seite 7 gegebene Zeichnung wie in der folgenden Figur dargestellt werden.



Das Integral $\int \frac{dx}{s}$ über b_1 erstreckt, wie man sieht, wenn b_1 unendlich nahe an der Linie $k_1\ k_2$ gezogen gedacht wird, ist rein imaginär. Also ist A_{11} rein imaginär. Ebenso ist $\int_{b_1} \frac{x dx}{s} = A_{21}$ rein imaginär. Ebenso sind A_{12}, A_{21} also auch a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} rein imaginär, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} hingegen rein reelle Grössen, folglich sind die τ rein imaginär. Es sei s auf der linken Seite von $k_1\ k_2$ im untern Blatte negativ.

Giebt man nun u_1 im Puncte k_1, der sich auf dem negativen Ufer von b_1 und a_1 befindet, den Werth 0, so hat u_1 in dem Puncte, welchen die positiven Ufer von a_1 und b_1 gemein haben (wenn man diesen Punct unendlich nahe an k_1 denkt), den Werth $1+\tau$. Führt man sodann x von diesem Punct aus über das positive Ufer von b_1, so nimmt u_1 von $1+\tau_{11}$ bis zu τ_{11} ab, und wenn b_1 unendlich nahe an $\overline{k_1\ k_2}$ gedacht wird, so entspricht b_1 in der u_1-Ebene die in den beiden Zeichnungen mit b_1 bezeichnete Gerade. Die begrenzte Fläche liegt zur Linken, wenn man also nun über das negative Ufer von a_1 mit x fährt, so beschreibt u_1 (a_1 unendlich nahe der reellen Achse durch den unendlich fernen Punct hindurch um k_6 herum zum Anfangspunct zurücklaufend gedacht) die gerade Linie von τ_{11} bis 0 die in den Figuren mit $\mathfrak{a}_1^-$ bezeichnet ist. Führt man dann x auf dem negativen Ufer von b_1 und zuletzt auf dem positiven von a_1 nach k_1 zurück, so ergiebt sich als Bild des negativen Ufers von b_1 die Linie $0 \ldots 1$ ($\mathfrak{b}_1^-$) und das positive Ufer von a_1 die Linie $1 \ldots 1+\tau_{11}$ ($\mathfrak{a}_1^+$)

Fig. 1

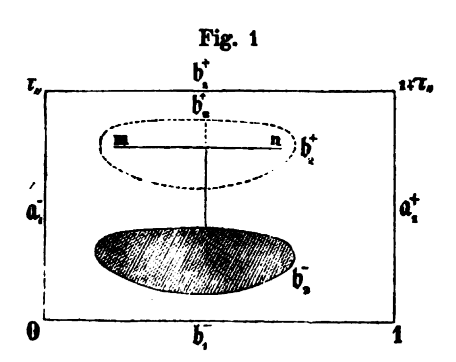
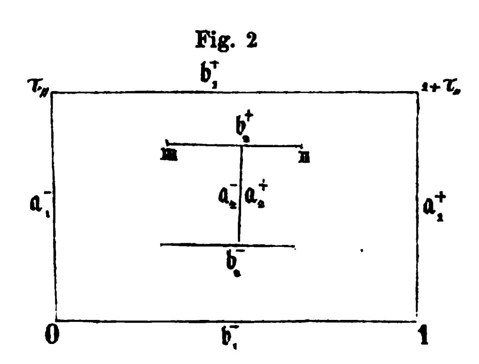


Fig. 2



Das Bild des Schnittsystems $a_1\ b_1$ in der u_1-Ebene ist also ein Rechteck mit den Ecken 0, 1, $1+\tau_{11}$, τ_{11}, und den Puncten der Riemann'schen Fläche entsprechen Puncte im Innern des Rechtecks. Das Bild des Querschnitts b_2, der absichtlich in einiger Entfernung von der Linie $\overline{k_3\ k_4}$ gezogen ist, besteht aus zwei parallelen in sich zurücklaufenden Schlingen, von denen die eine $\mathfrak{b}_2^+$ dem positiven die andere $\mathfrak{b}_2^-$ dem negativen Ufer von b_1 entspricht (Fig. 1). Die Schlingen sind geschlossen, weil u_1 beim Umlauf um die beiden Ufer um 0 wächst. Da die beiden Ufer von b_1 in entgegengesetzten Richtung durchlaufen werden, so muss die Abbildung der Riemanns'chen Fläche in der u_1-Ebene von der einen Schlinge so begrenzt werden, dass die begrenzte Fläche in Bezug auf die eine im Innern liegt, in Bezug auf die andere aber ausserhalb. Zwischen k_3 und k_4 wird für einen reellen Werth von x im obern und untern Blatte du_1 unendlich klein zweiter

Ordnung, und diesen beiden Puncten entsprechen zwei Windungspuncte m, n im Innern des Rechtecks in der u_1-Ebene. Um diese Puncte herum setzt sich die Fläche des Rechtecks in eine zweite fort, die man sich darunter ausgebreitet denken kann, und die durch eine der Schlingen begrenzt ist, so dass (im Allgemeinen) ein Stück der u_1-Ebene doppelt bedeckt ist. An einer andern Stelle fehlt ein ebenso grosses Stück im Rechteck, das durch die parallele Schlinge begrenzt ist, so dass also dort die u_1-Ebene gar nicht bedeckt ist. Der Flächeninhalt der ganzen Abbildung ist demnach dem des Rechtecks gleich. Das Bild der beiden Ufer des Querschnitts a_2, welcher unendlich nahe an der Geraden $k_4\, k_5$ gezogen ist, so dass dort jedes Element du_1 (weil die $A_{11}\, A_{12} \dots$ rein imaginär sind) rein imaginär ist, wird dargestellt durch die beiden Ufer, einer homologe Puncte von $\mathfrak{b}_2^+\, \mathfrak{b}_2^-$ verbindenden, der imaginären Axe parallelen Geraden $\mathfrak{a}_2^-\, \mathfrak{a}_2^+$. Diese Gerade geht zwischen $m\; n$ hindurch aus dem einen Blatt ins andere. (In der Figur sind die Linien im untern Blatte punctirt, und $m\; n$ sind durch eine Gerade verbunden, längs welcher die beiden Blätter zusammen hängen).

Lassen wir nun den Querschnitt b_2 sich enger und enger an die Gerade $k_3\, k_4$ anschmiegen, so werden die Schlingen kleiner und kleiner, und arten zuletzt in zwei parallele Linien aus (Fig. 2), deren Endpuncte den Windungspuncten $m\; n$ entsprechen. Die u_1-Ebene ist alsdann durch das Bild der Fläche im Innern eines Rechtecks überall einfach, und nur einfach bedeckt. Das Rechteck ist aber im Innern durch ein System von Geraden durchfurcht, welches jedoch keinen Theil aus dem Rechtecke ausscheidet. Diese Linien überschreitet u_1 niemals, wenn x die Querschnitte nicht überschreitet.

Man zieht leicht den Schluss, dass auch dann, wenn die k nicht reell sind, die in eine einfach zusammenhängende zerschnittene Riemann'sche Fläche auf ein (im Allgemeinen krummlinig begrenztes) Parallelogramm durch ein Integral u so abgebildet werden kann, dass derselben ein die u-Ebene nur einfach bedeckendes Stück entspricht. Die Begrenzung besteht aber dann immer nicht blos aus dem Rand dieses Stückes, sondern hat auch Theile im Innern desselben.

Was die Convergenz der zweifach unendlichen ϑ-Reihe anbetrifft, so findet dieselbe bekanntlich statt, wenn die quadratische Form

$$i\pi(\tau_{11} m_1 m_1 + 2\tau_{12} m_1 m_2 + \tau_{22} m_2 m_2)$$

für alle reellen Werthe von $m_1\; m_2$ in ihrem reellen Theile negativ ist. Es soll hier die Convergenz der allgemeinen ϑ-Reihe untersucht werden:

$$(\Sigma)^p\, e^{\Sigma\Sigma a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu + 2\Sigma v_\mu m_\mu},$$

in der die äussern Summen über alle ganzen Zahlen $m_1\; m_2 \dots m_p$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken sind, die Summen im Exponenten sich aber auf die Indices μ, ν von 1 bis p beziehen.

Nach einem allgemeinen Princip convergirt eine Reihe, die man aus einer convergenten Reihe mit nur positiven Termen dadurch erhält, dass man diese Terme mit Grössen von der Form $\cos\varphi + i\sin\varphi$, worin φ von Term zu Term (reell) variirt, d. h. mit Zahlen vom absoluten Betrage Eins multiplicirt. Daher wird die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beschränkt, wenn man annimmt, dass die Moduln $a_{\mu\nu}$ und die Argumente v_μ reelle Grössen sind, was geschehen soll. Dann sind sämmtliche Terme positiv, und die Reihe convergirt, wenn sie überhaupt convergirt, unabhängig von der Anordnung der Terme.

Durch die orthogonale Substitution

$$m_\mu = \sum_{1}^{p}{}_{(\varepsilon)} c_{\mu\varepsilon}\, x_\varepsilon, \quad \mu = 1, 2, \dots p; \quad \varepsilon = 1, 2, \dots p;$$

kann man die Form $\Sigma\Sigma a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu$ auf die Form

$$\sum_{1}^{p}{}_{(\mu)} g_\mu x_\mu x_\mu = \sum_{1}^{p}{}_{(\mu)} g_\mu \left\{\sum_{1}^{p}{}_{(\varepsilon)} c_{\varepsilon\mu} m_\mu\right\}^2$$

bringen, und es sind g_1, $g_2, \dots g_p$ die *stets reellen* Wurzeln der Gleichung p^{ten} Grades in g:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-g, & a_{12}, & a_{12}, \ldots a_{1p} \\ a_{21}, & a_{22}-g, & a_{23}, \ldots a_{2p} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{35}-g, \ldots a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{p1}, & a_{p2}, & a_{p3} \ldots a_{pp}-g \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man nun $x_\mu = n_\mu + r_\mu$, worin n_μ jede ganze Zahl, r_μ jeden echten (positiven) Bruch einschliesslich Null bedeuten soll, so haben wir

$$m_\mu = \sum_1^p {}_{(\varepsilon)} c_{\mu\varepsilon} n_\varepsilon + \sum_1^p {}_{(\varepsilon)} c_{\mu\varepsilon} r_\varepsilon, \quad m_\mu - \sum_1^p {}_{(\varepsilon)} c_{\mu\varepsilon} n_\varepsilon = \sum_1^p c_{\mu\varepsilon} r_\varepsilon.$$

Da nun die r echte Brüche sind, und $\Sigma c_\mu c_\mu = 1$ ist, weil die Substitution orthogal ist, so ist $\Sigma c_\mu r_\mu \leqq \sqrt{p}$ und es können, wie auch die r gewählt werden mögen, wenn die $n_1, n_2, \ldots n_p$ gegeben sind, die m_μ nicht mehr als $\sqrt{p}$ verschiedene ganzzahlige Werthe annehmen, (die alle in einem Intervall von der endlichen Grösse $\sqrt{p}$ liegen). Sind nun $m_1, m_2, \ldots m_p$ sämmtliche, also höchstens $(\sqrt{p})^p$ Combinationen ganzer Zahlen, welche man erhalten kann, wenn man bei fest vorgegebenen $n_1\, n_2 \ldots n_p$ in den Gleichungen

$$m_1 = \sum_\varepsilon c_{1\varepsilon} n_\varepsilon + \Sigma c_{1\varepsilon} r_\varepsilon,\; m_2 = \Sigma c_{2\varepsilon} n_\varepsilon + \Sigma c_{2\varepsilon} r_\varepsilon, \ldots m_p = \Sigma c_{p\varepsilon} n_\varepsilon + \Sigma c_{p\varepsilon} r_\varepsilon$$

den Brüchen r alle möglichen Werthe ertheilt, so ist noch zu beachten dass, weil die Determinante $|\, c\,|$ gleich Eins, also von Null verschieden ist, jede einzelne Combination der m nur für einziges System gleichseitiger Werthe von r erhalten wird. Hieraus folgt nun, wenn die $m_1\, m_2 \ldots$ alle möglichen ganzzahligen Werthe annehmen, so giebt es höchstens $(\sqrt{p})^p$ Werthsysteme der $x_1\, x_2 \ldots x_p$ von der Beschaffenheit, dass $n_1 \leqq x_1 < n_1 + 1$, $n_2 \leqq x_2 < x_2 + 1, \ldots n_p \leqq x_p < n_p + 1$ ist.

Daher muss, wenn $g_1, g_2, \ldots$ sämmtlich negativ sind, d. h. wenn die Form $\Sigma\Sigma a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu$ immer negativ ist, und wenn $2\Sigma v_\mu m_\mu = 2\Sigma u_\mu n_\mu + 2\Sigma u_\mu r_\mu$ gesetzt wird, für jeden Term $A_{m_1 m_2 \ldots m_p}$ der Reihe

$$(\Sigma)^p\, e^{\Sigma\Sigma a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu + 2\Sigma v_\mu m_\mu} = (\Sigma)^p A_{m_1 m_2 \ldots m_p}$$

sich mindestens *ein* Term in der Reihe

$$(\Sigma)^p\, (\sqrt{p})^p\, e^{\Sigma g_\mu n_\mu + 2\Sigma u_\mu n_\mu + 2\Sigma u_\mu r_\mu}$$

worin die n alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis ∞ zu durchlaufen haben, vorfinden oder, wenn wir $\sqrt{u_\mu u_\mu}$ positiv nehmen, ein Term der convergenten Reihe

$$(\Sigma)^p\, (\sqrt{p})^p \,.\, e^{2\Sigma\sqrt{u_\mu u_\mu}} \,.\, e^{\Sigma g_\mu u_\mu n_\mu + 2\Sigma u_\mu n_\mu} = (\sqrt{p})^p\, e^{2\Sigma\sqrt{u_\mu u_\mu}} \,.\, \vartheta(u_1, g_1) \,.\, \vartheta(u_2, g_2) \ldots \vartheta(u_p, g_p)$$

vorfindet, der mindestens ebenso gross, im Allgemeinen grösser als der Term $A_{m_1 m_2 \ldots m_p}$. Wird die Convergenz der einfach unendlichen ϑ-Reihe

$$\vartheta(u, g) = \sum_{-\infty}^{\infty} {}_{(m)} e^{gmm + 2mu}$$

für negative g als bekannt vorausgesetzt, so ist die Convergenz allgemein erwiesen. Die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-g, & a_{12} \ldots a_{1p} \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{p1}\, a_{p2} & \ldots a_{pp}-g \end{vmatrix} = 0$$

braucht man nicht aufzulösen, sondern, da ihre Wurzeln sämmtlich reell sind, so müssen, damit sie alle negativ sind, ihre sämmtlichen Coefficienten nur einerlei Zeichen haben.

Für manche Untersuchungen ist es nützlich, den Grenzwerth der Constanten der Rosenhain'schen Functionen zur Hand zu haben, welchen diese annehmen, wenn Verzweigungspuncte aufeinander fallen. Deshalb sollen einige hier Platz finden:

Fallen in der obern Figur auf Seite 21 die Puncte k_3 und k_4 zusammen, so hat man

$$A_{12}=\int\limits_{b_2}\frac{dx}{s}=\frac{2\pi i}{\sqrt{(k_3-k_1)(k_3-k_2)(k_3-k_5)}},\quad B_{12}=\int\limits_{a_2}\frac{dx}{s}=\infty,$$

$$A_{22}=\int\limits_{b_2}\frac{x\,dx}{s}=\frac{2i\pi k_3}{\sqrt{(k_3-k_1)(k_3-k_2)(k_3-k_5)}},\quad B_{22}=\int\limits_{a_2}\frac{x\,dx}{s}=\infty.$$

Es ist in diesem Falle vorzuziehen, für eins der Integrale $w_1\,w_2$, etwa für w_2, ein anderes nämlich:

$$w_2=\int\frac{(x-k_3)}{s}\,dx=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-k_1)(x-k_2)(x-k_5)}}$$

einzuführen. Dann ist $A_{22}=0$, $|A|=-2i\pi A_{21}:\sqrt{(k_3-k_1)(k_3-k_2)(k_3-k_5)}$, und B_{22} endlich. Ferner:

$$u_1=\int\frac{dx}{A_{21}\sqrt{x-k_1)(x-k_2)(x-k_5)}},\quad u_2=\frac{\sqrt{(k_3-k_1)(k_3-k_2)(k_3-k_5)}}{2i\pi}\left\{\int\frac{dx}{s}-A_{11}\,u_1\right\},$$

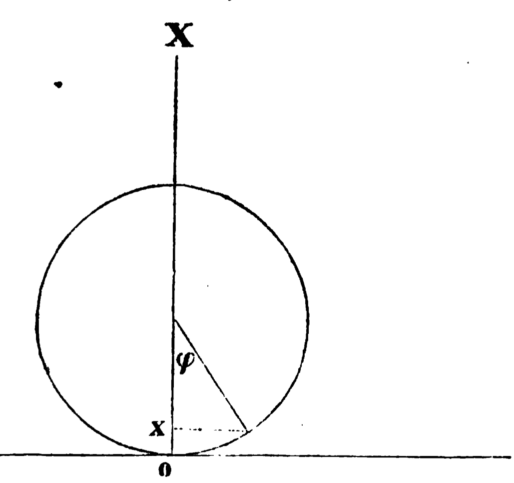
$$\tau_{11}=\frac{B_{21}}{A_{21}},\quad \tau_{12}=\frac{B_{22}}{A_{21}},\quad \tau_{22}=\infty.$$

Die ϑ-Functionen mit zwei Veränderlichen reduciren sich in diesem Falle auf solche mit einer Veränderlichen, $\vartheta^{01}_{00}(u)$, $\vartheta^{01}_{01}(u)$, $\vartheta^{01}_{11}(u)$, $\vartheta^{11}_{00}(u)$, $\vartheta^{11}_{01}(u)$, $\vartheta^{11}_{11}(u)$ verschwinden ganz. Aber die Quotienten derselben können zur Auswerthung elliptischer Integrale dritter Gattung dienen.

II.

Anwendungen der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen.

Bewegung eines schweren Punctes auf einem Kreise.*)



Ein schwerer Punct ist gezwungen auf der Peripherie eines Kreises zu bleiben, dessen Gleichung und Differentialgleichung

$$x(x-2)+yy = 0, \quad (x-1)\,dx+ydy = 0$$

sind, welches sind die Gleichungen der Bewegung?

Die y-Achse $(0\,Y)$ welche den Kreis berührt, sei horizontal, die x-Achse $(0\,X)$ sei vertical und positiv der Schwere entgegen gerichtet. Ist nun die Geschwindigkeit des Punctes gleich $v = \sqrt{(dx\,dx+dy\,dy)} : dt$, so giebt das Princip der lebendigen Kraft $vv = 2g(h-x)$, worin h eine willkührliche positive Constante bedeutet, g aber die Zahl, welche angiebt, wie oft man den Halbmesser des Kreises nehmen muss, um das Doppelte der Strecke zu erhalten, welches ein freier fallender Körper in der Zeiteinheit (Secunde) durchmisst. *Die Zahl g ist daher der Länge des Halbmessers umgekehrt proportional.* Ist $h < 2$, so ist $v = 0$ für $x = h$, und da vv nicht negativ sein kann, so ist in diesem Falle h die höchste Höhe, bis zu welcher der schwere Punct ansteigen kann. Ist aber $h > 2$, so fehlt eine solche anschauliche Bedeutung. Den Winkel, den der vom Mittelpuncte des Kreises nach dem schweren Puncte gezogene Radius mit der Richtung der Schwere macht, wollen wir mit φ bezeichnen, und sein Maximum, wenn $h < 2$ ist, mit α.

Da nun

$$vv\,dt\,dt = dx\,dx+dy\,dy, \quad dy\,dy = (x-1)\,(x-1)\,dx\,dx : yy$$

ist, so folgt

$$v^2dt^2 = 2g(h-x)\,dt^2 = dx^2\left[1+\left(\frac{x-1}{y}\right)^2\right] = \frac{dx^2}{y^2}[y^2+x(x-2)+1] = \frac{dx^2}{x(2-x)},$$

und also

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2g\,x(h-x)\,(2-x)}} = \frac{1}{2}\,\frac{d\frac{x}{h}}{\sqrt{g}\sqrt{\frac{x}{h}\left(1-\frac{x}{h}\right)\left(1-\frac{h}{2}\,\frac{x}{h}\right)}}.$$

Rechnet man die Zeit von dem Moment an, in welchem der Punct die y-Axe berührt, so ist, (1) (6)

*) Um die Citation zu erleichtern, wollen wir durch die in Klammern hie und da hinzugefügten Zahlen auf die betreffenden Gleichungen des Theiles I hinweisen.

$$\frac{x}{h} = \sin^2 \operatorname{am}(\sqrt{g}t, \sqrt{\tfrac{1}{2}h}), \quad x = h \sin^2 \operatorname{am}\sqrt{g}\,t,$$

wenn der Modul $k = \sqrt{\tfrac{1}{2}h}$ als selbstverständlich fortgelassen wird.

Für den Fall $h < 2$ ist $k = \sin\tfrac{1}{2}\alpha$, $k' = \cos\tfrac{1}{2}\alpha$, weil $h = 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$ ist. Nun ist auch $x = 1 - \cos\varphi = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi$, also

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = k \sin \operatorname{am}\sqrt{g}\,t, \quad \cos\tfrac{1}{2}\varphi = \Delta \operatorname{am}\sqrt{g}\,t,$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = 2k\sqrt{g}\cos \operatorname{am}\sqrt{g}\,t = 2\sqrt{g}\sqrt{k^2 - \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi}.$$

Im Falle $h < 2$ ist, kann die Winkelgeschwindigkeit geschrieben werden

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\sqrt{g}\sqrt{\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi} = 2\sqrt{g}\sqrt{\sin\frac{\alpha+\varphi}{2}\sin\frac{\alpha-\varphi}{2}},$$

welche Form für die Rechnung mit Logarithmen bequem ist.

Es sei nun zuerst $h < 2$, und wir setzen voraus, dass die numerischen Rechnungen mit zehnstelligen Logarithmen ausgeführt werden. Dann kann man natürlich Grössen vernachlässigen, die erst auf Decimalen jenseits der zehnten Stelle Einfluss haben. Man wird daher für die Rechnung verschiedene Formeln anzuwenden haben, je nach den Grenzen, in denen α enthalten ist. Es bedeute $2T$ die ganze Schwingungsdauer, d. h. einen vollen Hin- und Hergang des pendelnden Punctes*). Sehen wir zu, wie lange die Formeln (14), (15), (16)

$$q = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{\cos\frac{1}{2}\alpha}}{1+\sqrt{\cos\frac{1}{2}\alpha}}, \quad K = \frac{\pi}{2}(1+2q)^2 = \frac{2\pi}{(1+\sqrt{\cos\frac{1}{2}\alpha})^2}, \quad T = \frac{2K}{\sqrt{g}} = \frac{4\pi}{(1+\sqrt{\cos\frac{1}{2}\alpha})^2\sqrt{g}},$$
$$\cos\frac{\sqrt{g}\,t\pi}{K} = \cos[\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{\cos\tfrac{1}{2}\alpha})^2\sqrt{g}\,t] = \frac{1+\sqrt{\cos\frac{1}{2}\alpha}}{1-\sqrt{\cos\frac{1}{2}\alpha}}\;\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi - \sqrt{\cos\frac{1}{2}\alpha}}{\cos\frac{1}{2}\varphi + \sqrt{\cos\frac{1}{2}\alpha}}$$

anwendbar sind.

Bei q ist der wesentlichste Theil des hierbei gemachten Fehlers $2q^5$, q^4 bei $\cos\frac{\sqrt{g}\pi t}{K}$, $2q^4$ bei $K:\pi$. Man muss also α so klein annehmen, dass $2q^4$ erst in der elften Decimale wirksam wird. Nun ergiebt sich aus den Legendre'schen Tafeln, wenn der Punct im Ganzen über 40^0 hinweg geht, also wenn $\alpha = 20^0$, $\tfrac{1}{2}\alpha = 10^0$ ist:

$$\lg \operatorname{vulg} q = 7{,}28185 - 10, \quad \lg \operatorname{vulg} 2q^4 = 0{,}42843 - 11,$$
$$2q^4 = 0{,}000\;000\;000\;026\;808\ldots$$

Der Fehler macht sich also höchstens in der elften Stelle mit drei Einheiten geltend.

Setzt man, um noch die Ausdrücke für die logarithmische Rechnung bequemer zu machen,

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \cos^2\beta, \quad \cos\tfrac{1}{2}\varphi = \cos\psi,$$

so folgt

$$q = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\beta, \quad T = \frac{\pi}{\sqrt{g}\cos^4\frac{1}{2}\beta},$$
$$\cos(2\sqrt{g}\,t\cos^4\tfrac{1}{2}\beta) = \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}\beta\,\operatorname{cotg}\frac{\beta+\psi}{2}\,\operatorname{cotg}\frac{\beta-\psi}{2}.$$

Da $\cos^4\tfrac{1}{2}\beta$ nur wenig von Eins verschieden ist, so ist nahezu $T = \pi:\sqrt{g}$ d. h. *die Schwingungsdauer ist für kleine Amplituden constant, und zwar proportional der Quadratwurzel aus dem Halbmesser des Kreises, oder der Pendellänge*, weil g diesem Halbmesser umgekehrt proportional ist.

Liegt α unterhalb 90^0, $\tfrac{1}{2}\alpha$ unterhalb 45^0, so reicht es bei einer Rechnung mit zehnziffrigen Logarithmen aus

---

*) Richtiger wäre wohl die *ganze* Schwingungsdauer mit T zu bezeichnen, allein in der Lehre vom Pendel ist es nun einmal gebräuchlich, die Zeit einer einfachen Schwingung Schwingungsdauer zu nennen.

$$q = \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{16}\operatorname{tg}^{10}\tfrac{1}{2}\beta,\quad 2K = \pi(1+2q+2q^4)^2 = \pi(1+\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}^8\tfrac{1}{2}\beta):\cos^2\tfrac{1}{2}\beta,$$

$$\cos\frac{\pi\sqrt{g}\,t}{K} = \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{cotg}\frac{\beta+\psi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta-\psi}{2}\left(1+q^2\operatorname{cotg}^2\frac{\beta+\psi}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{\beta-\psi}{2}-2q^4\right)$$

zu setzen. Rechnet man mit nur siebenstelligen Logarithmen, so sind diese Formeln noch für grössere Werthe von α brauchbar. Will man nur die Schwingungsdauer, also zunächst K haben, so ist die Formel (15), nachdem q mittels (14) gefunden ist, so lange $h < 2$ ist, fast immer anwendbar.

Ist nun α bis zu einem Werthe gestiegen, für welchen die aufgestellten Formeln nicht mehr hinreichende Genauigkeit bieten, so kann man verschiedene Mittel anwenden um fertige Resultate zu erhalten, deren Genauigkeit schon dann, wenn $\alpha = 90^0$, $k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist, bei Rechnung mit zehnziffrigen Logarithmen vollständig ist, z. B. die Transformation (45). Wächst α, so nimmt die Genauigkeit der dadurch erhaltenen Formeln zu, und wird für $\alpha = 90^0$ exact. Diese Formeln sind, was in der Natur der Transformation liegt, keineswegs so handlich wie im abgehandelten Falle. Allein es scheint doch in mancher Beziehung vortheilhaft, fertige Ausdrücke von ausreichender Genauigkeit zu haben, wenn auch zu ihrer Auswerthung etwas mehr Rechnung nöthig ist. Wir setzen $k_1 = \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2 = \sin\gamma$, $k_1' = \cos\gamma$. K_1 und K_1' seien die den Grössen K, K' entsprechenden Periodicitätsmoduln der Function $\sin\operatorname{am}(u, k_1)$, q_1 die Grösse, welcher q entspricht. Dann ist:

$$q_1 = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{\cos\gamma}}{1+\sqrt{\cos\gamma}},\quad K_1 = \frac{2\pi}{(1+\sqrt{\cos\gamma})^2},\quad K_1' = -\frac{K_1\lg q}{\pi} = -\frac{2\lg\frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{\cos\gamma}}{1+\sqrt{\cos\gamma}}}{(1+\sqrt{\cos\gamma})^2}.$$

Aus (43) erkennt man aber, dass wenn man u um $4K$ vermehrt, sich $\tfrac{1}{2}i(1+\sqrt{k})u$ um $2i(1+\sqrt{k})K$ vermehrt, und dies ist der imaginäre Periodicitätsmodul der transformirten Function, also $2iK_1'$. Demnach ist:

$$K = \frac{K_1'}{(1+\sqrt{k})^2} = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{\sin\gamma})^2K_1' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{\sin\gamma}}{1+\sqrt{\cos\gamma}}\right)^2\lg\frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{\cos\gamma}}{1+\sqrt{\cos\gamma}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{g}\,T.$$

Wächst α zu 180^0, so sinkt γ auf Null herab und T wird unendlich gross. Die Complicationen, welche die angegebenen Formeln der numerischen Rechnung bieten, sind noch nicht erheblich, besonders einfach würden sie werden, wenn man Tafeln hätte, in denen für echte Brüche ε der Werth von $1-\sqrt{\varepsilon}:1+\sqrt{\varepsilon}$ und dessen Logarithmus enthalten wäre. Solche Tafeln würden überhaupt die Rechnung mit elliptischen Functionen sehr erleichtern. Complicirter ist die Berechnung der Zeit aus der Amplitude. Hierzu hat man aus (45):

$$\Delta^2\operatorname{am}\tfrac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2\sqrt{g}\,t = 1+\sin\gamma\,\frac{1-Q}{1+Q},\quad Q = \frac{\cos\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha-\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi}}{\sin\tfrac{1}{2}\alpha-\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi}.$$

Setzt man nun

$$\frac{\Delta\operatorname{am}i(1+\sqrt{k})^2\sqrt{g}\,t-\sqrt{k_1'}}{\Delta\operatorname{am}i(1+\sqrt{k})\sqrt{g}\,t+\sqrt{k_1'}} = N,$$

so folgt aus (16) und (17)

$$\cos\frac{i(1+\sqrt{k})^2\sqrt{g}\,t\,\pi}{2K_1} = \cos\frac{i(1+\sqrt{\cos\gamma})^2\sqrt{g}\,t}{(1+\sqrt{\sin\gamma})^2} = \frac{1+\sqrt{\cos\gamma}}{1-\sqrt{\cos\gamma}}\,N,$$

$$\sqrt{g}\,t = \left(\frac{1+\sqrt{\sin\gamma}}{1+\sqrt{\cos\gamma}}\right)^2\lg\frac{N+\sqrt{N^2-4q_1^2}}{2q_1}.$$

Für $\alpha = 180^0$ ist $\gamma = 0$, $k_1 = 0$, $q_1 = 0$, $K_1 = \tfrac{1}{2}\pi$, $K_1' = \infty$,

$$\sin\operatorname{am}\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{k})^2\,i\sqrt{g}\,t = i(1+\sqrt{k})^2\sin\tfrac{1}{2}\varphi:(1+\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi-\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi),\quad (45)$$

$$\sin\operatorname{am}2i\sqrt{g}\,t = 2i\sin\tfrac{1}{2}\varphi:\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi = \sin 2i\sqrt{g}\,t,$$

$$2\sqrt{g}\,t = \lg\left(\frac{2\sin\tfrac{1}{2}\varphi}{\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi}+\sqrt{1+\frac{4\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi}{\cos^4\tfrac{1}{2}\varphi}}\right) = \lg\frac{1+\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi+2\sin\tfrac{1}{2}\varphi}{\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi}$$

$$= \lg\frac{(1+\sin\tfrac{1}{2}\varphi)^2}{\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi} = \lg\frac{(1+\sin\tfrac{1}{2}\varphi)^2}{1-\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi} = \lg\frac{1+\sin\tfrac{1}{2}\varphi}{1-\sin\tfrac{1}{2}\varphi},$$

$$\sqrt{g}\,t = \tfrac{1}{2}\lg\frac{1+\sin\frac{1}{2}\varphi}{1-\sin\frac{1}{2}\varphi} = \tfrac{1}{2}\lg\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}x}}{1-\sqrt{\frac{1}{2}x}}.$$

Nun bliebe noch der Fall zu erledigen, in welchem $k > 1$, $h > 2$ ist. In diesem Falle wird man die Differentialgleichung der Bewegung in der Form schreiben

$$dt = \frac{\frac{1}{2}\,d\,\frac{x}{2}}{\sqrt{gh}\sqrt{\frac{x}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{2}{h}\,\frac{x}{2}\right)}}$$

und wird nun $\frac{2}{h} = k^2$ setzen. Dann ist $x = 2\sin^2 \operatorname{am}\sqrt{hg}\,t$. Die Zeit welche verfliesst, bis der Punct aus der tiefsten Lage in die höchste gelangt,

$$\tfrac{1}{2}T = \frac{1}{\sqrt{gh}}K = \frac{1}{\sqrt{gh}}\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}}$$

findet man aus (14) und (15)

$$q = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{1-\frac{4}{h^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{4}{h^2}}} = \frac{1}{2}\,\frac{h-\sqrt{h^2-4}}{h+\sqrt{h^2-4}}, \quad K = \tfrac{1}{2}\pi(1+2q+2q^4\ldots)^2$$

um so rascher, je grösser h ist. Die numerische Rechnung ist von den eben ausgeführten nicht wesentlich verschieden, weshalb ein weiteres Eingehen auf diesen Fall unterbleibt.

Bewegung eines schweren Punctes auf einer Parabel.

Erster Fall. Die Achse der Parabel ist vertikal, so dass die vom Scheitel ins Innere der Parabel gehende Richtung der Schwere gleichgerichtet ist. Unter g werde jetzt das verstanden, was es gewöhnlich bedeutet. Die positive x-Achse lassen wir mit der Axe der Parabel zusammenfallen, also nach unten gehen, und setzen die Gleichung der Parabel in der Form voraus:

$$yy = 4px, \quad ydy = 2pdx.$$

Dann hat man, nach dem Princip der lebendigen Kraft

$$v^2 = 2g(x+p') = \frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = \frac{(y^2+4p^2)\,dx^2}{y^2} = \frac{(x+p)\,dx^2}{x},$$

$$\sqrt{2g(x+p')}\,dt = \sqrt{\frac{x+p}{x}}\,dx,$$

$$\sqrt{2g}\,dt = \frac{(x+p)\,dx}{\sqrt{x(x+p)\,(x+p')}}.$$

Hierin ist p' eine willkürliche Constante, die positiv oder negativ sein kann. Zwei Fälle sind besonders einfach. Nämlich wenn $p' = 0$ und wenn $p' = p$ ist. Im letzteren Falle ist

$$\sqrt{2g}\,dt = \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}, \sqrt{\frac{g}{2}}(t-t_0) = \sqrt{x}, \quad x = \tfrac{1}{2}g(t-t_0)^2 = \frac{y^2}{4p}, \quad y = \sqrt{2pg}\,(t-t_0)$$

wenn die Constante so bestimmt ist, dass sich zur Zeit t_0 der Punct im Scheitel der Parabel befindet. Die Parabel erleidet in diesem Falle keinen Druck, und kann als die Bahn eines freien geworfenen Körpers aufgefasst werden.

Ist $p' = 0$, so hat man

$$\sqrt{2g}\,dt = \frac{\sqrt{x+p}.dx}{x} = d2\sqrt{x+p} + \sqrt{p}\,d\lg\frac{\sqrt{x+p}-\sqrt{p}}{\sqrt{x+p}+\sqrt{p}}.$$

Der Scheitel der Parabel wird dann erst nach unendlicher Zeit erreicht.

Im allgemeinen Falle sei zuerst p' positiv. Dann geht der Punct über den Scheitel hinweg, weil für $x = 0$, v^2 positiv ist. Man gelangt zur kanonischen Form, wenn man

$$x^2 = p' \operatorname{tg}^2\varphi, \quad dx = \frac{2p' \operatorname{tg}\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi$$

setzt. Dadurch erhält man

$$\sqrt{2g}\, dt = \frac{2p' \operatorname{tg}\varphi (p' \operatorname{tg}^2\varphi + p) d\varphi}{\sqrt{p'} \operatorname{tg}\varphi \cos^2\varphi \sqrt{p' \operatorname{tg}^2\varphi + p'} \sqrt{p' \operatorname{tg}^2\varphi + p}} = \frac{2(p' \sin^2\varphi + p \cos^2\varphi) d\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{p' \sin^2\varphi + p \cos^2\varphi}},$$

$$\sqrt{2g}\, dt = 2 \frac{\sqrt{p - (p - p') \sin^2\varphi}}{\cos^2\varphi} d\varphi, \quad \sqrt{\frac{g}{2p}}\, dt = \frac{\sqrt{1 - \frac{p - p'}{p} \sin^2\varphi}}{\cos^2\varphi} d\varphi.$$

Ist $p' < p$, so kann $p - p' : p = kk$ gesetzt werden. Setzt man dann noch $d\varphi : \sqrt{1 - kk \sin\varphi \sin\varphi} = du$, so folgt

$$\sqrt{\frac{g}{2p}}\, dt = \frac{\Delta^2 \operatorname{am} u}{\cos^2 \operatorname{am} u} du.$$

Rechnet man die Zeit von da an, wenn der Punct sich im Scheitel befindet, so folgt aus (65)

$$\sqrt{\frac{g}{2p}}\, t = u \frac{\Theta_1''^0(0)}{\Theta_1^0(0)} - \frac{d \lg \Theta_0^1(u)}{du}.$$

Die numerischen Rechnungen sind um so bequemer, je kleiner $(p - p') : p$ ist. Ist $p' > p$, so kann man

$$x = p \operatorname{tg}^2\varphi, \quad dx = 2p \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi : \cos^2\varphi$$

setzen und erhält

$$\sqrt{2g}\, dt = \frac{2p \operatorname{tg}\varphi (1 + \operatorname{tg}^2\varphi) d\varphi}{\cos^2\varphi\, p \operatorname{tg}\varphi \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} \sqrt{p \operatorname{tg}^2\varphi + p'}} = \frac{2 d\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{p' - (p' - p) \sin^2\varphi}}.$$

Nun kann man $p' - p : p' = k^2$ setzen, $\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \Delta\varphi$, $d\varphi : \Delta\varphi = du$, so folgt

$$\sqrt{\frac{gp'}{2}}\, dt = \frac{du}{\cos^2 \operatorname{am} u}, \quad k'^2 = p : p', \quad p \sqrt{\frac{g}{2p'}}\, dt = \frac{k'^2 du}{\cos^2 \operatorname{am} u},$$

$$p \sqrt{\frac{g}{2p'}}\, t = u \frac{\Theta_0''^0(0)}{\Theta_0^0(0)} - \frac{d \lg \Theta_0^1(u)}{du}.$$

Die numerische Rechnung ist um so bequemer, je kleiner $(p' - p) : p'$ ist.

Ist p' negativ, gleich $-p'$, so bedeutet p' das kleinste x, welches erreicht werden kann, also die höchste Höhe bis zu welcher der Punct emporsteigen kann. Derselbe geht nicht über den Scheitel hinweg, weil dort $v^2 = -2gp'$ negativ wäre. Die Rechnung kann dem vorhergehenden Falle conform geführt werden. Setzt man nämlich $x = x' + p'$, $p + p' = p''$, so folgt

$$\sqrt{2g}\, dt = \frac{(x + p) dx}{\sqrt{x(x + p)(x - p')}} = \frac{(x' + p'') dx'}{\sqrt{x'(x' + p')(x' + p'')}},$$

so dass man also nur in der vorhergehenden Form p durch $p''(= p + p')$ zu ersetzen braucht.

Zweiter Fall. Die Achse der Parabel ist vertical, die ins Innere gehende Richtung derselben, der Schwere entgegengesetzt. Wir lassen wiederum die positiven x mit der Achse der Parabel, deren Gleichung $y^2 = 4px$ sein mag, zusammenfallen. Dann hat man nach dem Princip der lebendigen Kraft

$$v^2 = 2g(h - x) = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{4p^2 + y^2}{y^2} \frac{dx^2}{ut^2} = \frac{p + x}{x} \frac{dx^2}{dt^2},$$

wenn h die höchste Höhe ist, bis zu welcher der Punct ansteigen kann. Offenbar ist h immer positiv. Es folgt

$$\sqrt{2g}\, dt = \frac{p + x}{\pm \sqrt{x(p + x)(h - x)}} dx.$$

Rechnet man die Zeit von da an, wenn $x = h$ ist, so nimmt x anfänglich ab, dx ist negativ, und das Wurzelzeichen ist, damit dt positiv werde, negativ zu nehmen. Setzen wir nun

$$x = h \cos^2\varphi, \quad dx = -2h \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi,$$

so erhalten wir

$$\sqrt{2g}\,dt = \frac{-2h\cos\varphi\,\sin\varphi\,(p+h\cos^2\varphi)\,d\varphi}{-k\cos\varphi\sqrt{(1-\cos^2\varphi)}\,(p+h\cos^2\varphi)} = 2\sqrt{p+h-h\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= 2\sqrt{p+h}\,\Delta\varphi\,d\varphi,\quad \Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},\quad k^2 = h:p+h,\quad k'^2 = p:p+h.$$

Hieraus ergiebt sich nach (56), $\varphi = \operatorname{am} u$ gesetzt,

$$\sqrt{\frac{g}{2(p+h)}}\,t = E(\varphi, k) = Z(u) + (E:K)\,u$$

$$= Z(u) - u\,\frac{\Theta_0''^{1}(0)}{\Theta_0^{1}(0)} = Z(u) + \frac{\pi^2}{4K^2}\,\frac{\sum_1^\infty q^{m(m+1)}(2m+1)^2}{\sum_1^\infty q^{m(m+1)}}. \qquad (68)$$

Jedesmal, wenn u um $2K$ zunimmt, nimmt t um $2\sqrt{\frac{2(p+h)}{g}}\,E$ zu, $Z(u)$ bleibt ungeändert. Die Bewegung ist eine pendelnde, und die Schwingungsdauer ist $2E\sqrt{2(p+h):g}$. Für nicht zu grosse h, namentlich so lange $h < p$ ist, ist hinlänglich genau nach (14) und (15)

$$q = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt[4]{p+h}-\sqrt[4]{p}}{\sqrt[4]{p+h}+\sqrt[4]{p}},\qquad K = \frac{\pi\,2\sqrt{p+h}}{(\sqrt[4]{p+h}+\sqrt[4]{p})^2},$$

$$E = \frac{\pi^2}{4K}\cdot\frac{1+9q^2}{1+q^2}. \qquad (68)$$

Ist h sehr klein, so ist q von 0 nur wenig verschieden, K und E nähern sich dem Werthe $\frac{1}{2}\pi$ und die Schwingungsdauer ist wie beim Kreise, jedoch nicht so nahe, constant.

Ist $h = p$, so drückt sich E durch Euler'sche Integrale aus und ist gleich $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Pi(\frac{1}{4})\,\Pi(\frac{1}{2})$.

Dritter Fall. Die Achse der Parabel ist horizontal.

Kommt der Punct aus unendlicher Entfernung des obern Zweiges, oder steigt er bis ins Unendliche, so muss er im Endlichen überall eine unendliche Geschwindigkeit haben. Diese Art der Bewegung kommt daher nicht in Betracht. Wir können deshalb die horizontal gewählte y-Achse durch den höchsten Punct, der bei der Bewegung erreicht wird, legen. Nehmen wir noch die positiven x in der Richtung der Schwere, also abwärts, so haben wir $v^2 = 2gx$ und es kann nun x alle Werthe von 0 bis ∞ annehmen. Die Gleichung und Differentialgleichung der Parabel sei

$$(x-h)\,(x-h) = 2py,\quad (x-h)\,dx = p\,dy,$$

wenn p der Parameter ist, und h die Höhe, bis zu welcher sich der schwere Punct über die Achse der Parabel erheben kann. Nun ist

$$v^2 = \frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = \frac{((x-h)^2+p^2)\,dx^2}{p^2\,dt^2} = 2gx,$$

$$p\sqrt{2g}\,dt = \sqrt{\frac{p^2+(x-h)^2}{x}}\,dx = \frac{p^2+(x-h)^2}{\sqrt{x((x-h)^2+p^2)}}\,dx.$$

Die Bewegung ist wie in den vorhergehenden Fällen bei der Parabel durch ein elliptisches Integral zweiter Gattung bestimmt, und es können daher die Coordinaten des Punctes nicht explicite als Functionen der Zeit dargestellt werden, sondern man muss sich begnügen, nach Einführung einer Hülfsgrösse, t durch ϑ-Functionen darzustellen.

Ehe man dies Differential auf die canonische Form transformirt, ist es gut einen algebraischen Theil abzusondern, nämlich zu schreiben

$$p\sqrt{2g}\,dt = d\,\tfrac{2}{3}\sqrt{x((x-h)^2+p^2)} + \frac{\frac{2}{3}h^2+p^2}{\sqrt{x((x-h)^2+p^2)}}\,dx - \tfrac{2}{3}h\sqrt{\frac{x}{(x-h)^2+p^2}}\,dx$$

woraus folgt, wenn $x = 0$ für $t = 0$ gesetzt wird,

$$3p\sqrt{2g}\,t = 2\sqrt{x((x-h)^2+p^2)} + \int_0^x \frac{2h^2+3p^2}{\sqrt{x((x-h)^2+p^2)}}\,dx - 2h\int_0^x \sqrt{\frac{x}{(x-h)^2+p^2}}\,dx.$$

Nun machen wir die Substitution

$$x = \varrho\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\varphi = \varrho\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi},\quad dx = \frac{2\varrho\sin\varphi\,d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{\varrho-x}{\varrho+x},\quad \varrho^2 = h^2+p^2,\quad \frac{\varrho+h}{2\varrho} = k^2,\quad \frac{\varrho-h}{2\varrho} = k'^2.$$

Hierdurch geht

$$\sqrt{x((x-h)^2+p^2)} \text{ in } 2\varrho\sqrt{\varrho}\frac{\sin\varphi}{(1+\cos^2\varphi)^2}\sqrt{1-\frac{\varrho+h}{2\varrho}\sin^2\varphi},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x((x-h)^2+p^2)}} \text{ in } \frac{d\varphi}{\sqrt{\varrho}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\varrho}\,\Delta\varphi},$$

$$\sqrt{\frac{x}{(x-h)^2+p^2}}\,dx \text{ in } \frac{\sqrt{\varrho}\,(1-\cos\varphi)^2 d\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta\varphi}$$

$$= \sqrt{\varrho}\frac{2-\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{2\sqrt{\varrho}\cos\varphi\,d\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta\varphi}$$

$$= \frac{2\sqrt{\varrho}\,d\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta\varphi} - \frac{\sqrt{\varrho}\,d\varphi}{\Delta\varphi} + 2\sqrt{\varrho}\,d\frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi}$$

über. Nach (58) ist aber noch

$$\frac{2\sqrt{\varrho}\,d\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta\varphi} = \frac{\varrho+h}{\sqrt{\varrho}}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi} - 2\sqrt{\varrho}\,d\frac{\cos\varphi\,\Delta\varphi}{\sin\varphi}$$

und es ergiebt sich somit:

$$\sqrt{\frac{x}{(x-h)^2+p^2}}\,dx = \frac{\varrho+h}{\sqrt{\varrho}}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{\sqrt{\varrho}\,d\varphi}{\Delta\varphi} + 2\sqrt{\varrho}\,d\frac{(1-\cos\varphi)\Delta\varphi}{\sin\varphi}.$$

Setzt man noch $d\varphi : \Delta\varphi = du$, so folgt

$$3p\sqrt{2g}\,t = 4\varrho\sqrt{\varrho}\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u}{(1+\cos\mathrm{am}\,u)^2} - 4\sqrt{\varrho}\,h\frac{(1-\cos\mathrm{am}\,u)\,\Delta\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u}$$

$$+ \frac{\sqrt{\varrho}}{\varrho}(2h^2+3p^2+2\varrho h)u - 4h\sqrt{\varrho}\int_0^u k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,du.$$

und hieraus nach (56)

$$\frac{3p\sqrt{2g}}{4h\sqrt{\varrho}}t = \frac{\varrho}{h}\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u}{(1+\cos\mathrm{am}\,u)^2} - \frac{(1-\cos\mathrm{am}\,u)\,\Delta\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u} + \left(\frac{2h^2+3p^2+2h\varrho}{4\varrho h} - \frac{\Theta_1''^{0}(0)}{\Theta_1^{0}(0)}\right)u + Z(u).$$

Für $u = K$ ist $\cos\mathrm{am}\,u = 0$, $x = \varrho$, $Z(K) = 0$, also

$$\frac{3p\sqrt{2g}}{4h\sqrt{\varrho}}t = \frac{\varrho-h}{h}k' + \left(\frac{2h^2+3p^2+2\varrho h}{4\varrho h} - \frac{\Theta_1''^{0}(0)}{\Theta_1^{0}(0)}\right)K.$$

Für negative Werthe von h ist $k < \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ und die Formeln (14) (15) (16) (17) reichen bei numerischen Rechnungen mit zehnstelligen Logarithmen völlig aus, wenn x, also φ gegeben ist, erst u und q und dann t zu berechnen, wenn schon die auszuführenden Operationen complicirter als beim Kreispendel sind. Für positive h würde zur Erreichung einer gleichen Genauigkeit Transformation erforderlich sein, was jedoch hier unterbleiben mag. Für $h = 0$, $k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ fällt die Z-Function aus der obigen Formel heraus und man hat nur u zu berechnen, indem dann

$$\sqrt{\frac{2g}{p}}\,t = \frac{4}{3}\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u}{(1+\cos\mathrm{am}\,u)^2} + u$$

ist.

Bewegung eines schweren Punctes auf einer Ellipse.

Die bisherigen Beispiele wurden mit elliptischen Functionen behandelt. Setzt man statt des Kreises oder der Parabel eine Ellipse, so führt die Aufgabe auf Rosenhain'sche Functionen, wenn ihre Achsen horizontal-vertikal sind. Es soll hier die Gleichung der Ellipse in der Form

$$(x-1)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = 1, \qquad (x-1)\,dx + \frac{y\,dy}{1-e^2} = 0$$

gedacht und die Achse der x vertikal genommen werden. Dann soll g, wie schon beim Kreise geschah, den doppelten Fallraum einer Secunde, gemessen durch die grosse Halbachse der Ellipse, bedeuten. Das Princip der lebendigen Kraft giebt

$$v^2 = 2g(h-x) = \frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2}\,\frac{1-(x-1)^2+(1-e^2)(1-x)^2}{x(2-x)} = \frac{dx^2}{dt^2}\,\frac{1-e^2(1-x)^2}{x(2-x)},$$

woraus folgt

$$dt = \frac{(1-e^2(1-x)^2)\,dx}{e\sqrt{2g}\sqrt{\left(\frac{1-e}{e}+x\right)x(h-x)(2-x)\left(\frac{1+e}{e}-x\right)}},$$

oder wenn wir die Zeitrechnung von der tiefsten Lage des Punctes, von $x=0$ an beginnen und zur Abkürzung $\sqrt{x\left(\frac{1-e}{e}+x\right)(h-x)(2-x)\left(\frac{1+e}{e}-x\right)}$ mit s bezeichnen,

$$e\sqrt{2g}\,t = \int_0^x \frac{1-e^2(1-x^2)}{s}\,dx = \int_0^x \frac{1-e^2+2e^2x}{s}\,dx + \int_0^x \frac{x^2\,dx}{s}.$$

Es drückt sich also die Zeit t durch die Höhe x, bis zu welcher der Punct zur Zeit t gehoben ist, mittelst eines ultraelliptischen Integrales zweiter Gattung aus. Da nämlich $\sqrt{x}(1-e^2(1-x)^2):s$ für sehr grosse x den Charakter einer ganzen Function besitzt, so lässt sich dieser Ausdruck in eine Reihe der Form $A + B\frac{1}{x} + C\frac{1}{x^2} + \ldots$ entwickeln, und folglich kann für sehr grosse x

$$\frac{1-e^2(1-x)^2}{s} = \frac{A}{\sqrt{x}} + \frac{B}{(\sqrt{x})^3} + \frac{C}{(\sqrt{x})^5} + \ldots$$

gesetzt werden. Integrirt man diese Function von x_0 bis x, so sieht man aus dieser Reihenentwickelung, dass für unendliche x das Integral wie $\sqrt{x}$, also wie eine algebraische Function unendlich wird, und folglich ist es ein Integral zweiter Gattung. In der zweiten oben für $e\sqrt{2g}\,t$ gegebenen Form ist es in ein Integral erster Gattung und dasjenige zweiter Gattung zerlegt, für welches fertige Formeln im Theil I sich vorfinden.

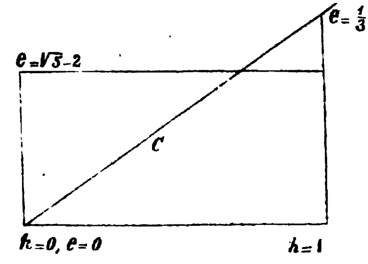
Um nun aus der Theorie der Rosenhain'schen Functionen Nutzen für die Berechnung der Zeit durch x zu ziehen, drücken wir sie durch die beiden überall endlichen Integrale: $w_1 = \int dx:s$, $w_2 = \int x\,dx:s$ aus. Die Verzweigung der wie x und s verzweigten Riemann'schen Fläche findet um die Puncte $-(1-e):e$, 0, h, 2, $(1+e):e$, ∞ statt, die sämmtlich auf der reellen Achse liegen. Die Wahl der Querschnitte hängt von den unter (167) und (168) verzeichneten Grössen L ab, welche in unserm Falle die nur mit e und h veränderlichen Werthe haben:

$$e^3L = 4(1-e^2(1-h)^2),$$

$$\begin{aligned} e^3L_1 &= 2(1+e)(1-e)(1+he-e), & e^3L_4 &= 2(1+e)(1-e)(2-h),\\ e^3L_2 &= 2(1+e)(1-e)(1-he+e), & e^3L_5 &= 2h(1-e)(1+e),\\ e^3L_3 &= h(1+e)(1+e)(1+e-he), & e^3L_6 &= (2-h)(1+e)(1+e)(1+he-e). \end{aligned}$$

Will man die linken Seiten dieser Gleichungen für verschiedene Werthe von e und h mit einander vergleichen, so kann man sie als Ordinaten z von Oberflächen auffassen, deren andere Ordinaten x y die Grössen e und h sind. Da sich L mit der Wahl der Querschnitte, wenn man nur die auf Seite 18 besprochenen Möglichkeiten zulässt, nicht ändert, so kommt es nur auf die letzten sechs Gleichungen an. Sie repräsentiren sechs Oberflächen. Den Schnittcurven entsprechen Gleichungen zwischen e und h (die man erhält,

wenn man $L_\mu = L_\nu$ setzt), oder Curven in der eh-Ebene, welche die Projectionen der Schnittcurven sind. Diese liefern ein Curvennetz, welches die eh-Ebene in Gebiete zerlegt, in denen die Grössenverhältnisse der L verschieden sind. In jedem einzelnen Gebiete aber sind diese Verhältnisse dieselben und wird das Querschnittsystem auf Grund der Seite 19 gemachten Bemerkungen auf eine bestimmte Weise zu wählen sein. Da von den Curven einige von der dritten und vierten Ordnung sind, so würde die Untersuchung, welches für alle möglichen Werthe von e und h die beste Wahl der Querschnitte sei, uns hier zu weit führen. Wir beschränken uns deshalb auf den Fall $h<1$, $e<\sqrt{5}-2$ $(=0{,}236\ldots)$. In diesem Gebiete haben nur zwei der Grössen L verschiedene Grössenverhältnisse. Nämlich L_1 und L_6 werden einander gleich, längs einer Curve c, deren Gleichung $2(1-e)=(2-h)(1+e)$ oder $4e-h-eh=0$ oder $(4-h)(1+e)=4$ ist. Die Curve c ist demnach ein Stück von einer Hyperbel, die durch den Punct $h=0$, $e=0$ und den Punct $h=1$, $e=\frac{1}{3}$ hindurch geht. In dem Rechteck mit den Ecken $h,e=0,0$; $0,\sqrt{5}-2$; $1,0$; 1; $\sqrt{5}-2$ ist nun

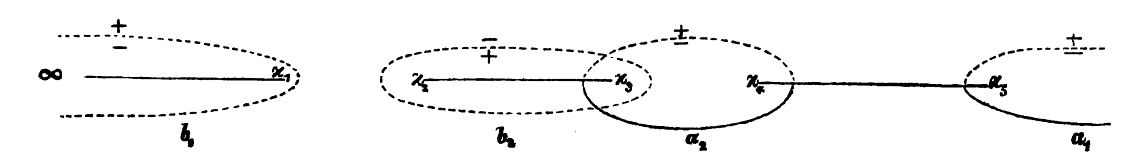


$$\text{oberhalb } c:\quad L_3<L_5<L_1<L_6<L_2<L_4,$$
$$\text{unterhalb } c:\quad L_3<L_5<L_6<L_1<L_2<L_4.$$

Es soll nun aus den auf Seite 19 angegebenen Gründen $\vartheta_{11}^{00}<\vartheta_{01}^{00}$, ϑ_{10}^{00} sein, wenn die Querschnitte so gezogen sind, dass die ϑ-Functionen möglichst gut convergiren. Diese Grössen sind aber nach (167) bez. proportional den vierten Wurzeln von L_1, L_5, L_3; L_2, L_6, L_4; L_3, L_1, L_5; L_4, L_2, L_6; L_5, L_3, L_1; L_6, L_4, L_2; jenachdem man k_1 auf $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \infty$ fallen lässt. Da $L_5>L_1$ ist, so ist der erste Fall, in welchem ϑ_{11}^{00} proportional $\sqrt[4]{L_1}$ ist, gleichviel ob der e, h entsprechende Punct oberhalb oder unterhalb c im Rechteck liegt, nicht günstig. Ebenso ist der zweite Fall unbrauchbar, weil $L_4>L_2$ ist. Es zeigt sich so, dass nur im dritten und sechsten Falle, also wenn ϑ_{11}^{00} proportional $\sqrt[4]{L_3}$ oder $\sqrt[4]{L_6}$ ist, $\vartheta_{11}^{00}<\vartheta_{01}^{00}$, ϑ_{10}^{00} ist, und zwar gleichmässig im ganzen Rechteck, oberhalb und unterhalb c. Um zwischen diesen beiden Fällen zu entscheiden, muss man untersuchen, in welchem von ihnen die u reell werden. Dies findet nur im sechsten Falle statt, also wenn k_1 auf ∞ geworfen wird, weil dann die $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, w_1, w_2$ rein imaginäre Grössen sind, letztere beiden so lange, als x, wie es die Natur des Problems erfordert, zwischen 0 und h liegt. Setzen wir also

$$k_1=\infty,\quad k_2=\varkappa_1=-\frac{1-e}{e},\quad k_3=\varkappa_2=0,\quad k_4=\varkappa_3=h,\quad k_5=\varkappa_4=2,\quad k_6=\varkappa_5=\frac{1+e}{e},$$

so ist das Schnittnetz wie in beifolgender Figur zu zeichnen



und die zunächst in Betracht kommenden ϑ-Functionen haben die Werthe:

$$\vartheta_{00}^{00}=\frac{\sqrt{|A|}}{2\pi e}\sqrt[4]{4e(1-e^2(1-h)^2)},\quad \vartheta_{11}^{00}=\frac{\sqrt{|A|}}{2\pi e}\sqrt[4]{e(2-h)(1+e)^2(1+eh-e)},$$
$$\vartheta_{01}^{00}=\frac{\sqrt{|A|}}{2\pi e}\sqrt[4]{2e(1-e^2)(2-h)},\quad \vartheta_{10}^{00}=\frac{\sqrt{|A|}}{2\pi e}\sqrt[4]{2e(1-e^2)(1+e-eh)}.$$

Die hierin noch unbestimmten achten Wurzeln der Einheit finden sich daraus, dass die linken Seiten dieser Gleichungen positiv reell sind. Hieraus ergeben sich nun die Grössen $p_0\, q_0\, r_0$ der Gleichungen (113) wie folgt:

$$p_0 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt[4]{4(1-e^2(1-h)^2)}+\sqrt[4]{2(2-h)(1-e^2)}-\sqrt[4]{2(1-e^2)(1+e-eh)}-\sqrt[4]{(2-h)(1+e)(1+e)(1+eh-e)}}{\sqrt[4]{4(1-e^2(1-h)^2)}+\sqrt[4]{2(2-h)(1-e^2)}+\sqrt[4]{2(1-e^2)(1+e-eh)}+\sqrt[4]{(2-h)(1+e)(1+e)(1+eh-e)}},$$

$$q_0 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt[4]{4(1-e^2(1-h)^2)}-\sqrt[4]{2(2-h)(1-e^2)}+\sqrt[4]{2(1-e^2)(1+e-eh)}-\sqrt[4]{(2-h)(1+e)(1+e)(1+eh-e)}}{\sqrt[4]{4(1-e^2(1-h)^2)}+\sqrt[4]{2(2-h)(1-e^2)}+\sqrt[4]{2(1-e^2)(1+e-eh)}+\sqrt[4]{(2-h)(1+e)(1+e)(1+eh-e)}},$$

$$r_0 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt[4]{4(1-e^2(1-h)^2)}-\sqrt[4]{2(2-h)(1-e^2)}-\sqrt[4]{2(1-e^2)(1+e-eh)}+\sqrt[4]{(2-h)(1+e)(1+e)(1+eh-e)}}{\sqrt[4]{4(1-e^2(1-h)^2)}+\sqrt[4]{2(2-h)(1-e^2)}+\sqrt[4]{2(1-e^2)(1+e-eh)}+\sqrt[4]{(2-k)(1+e)(1+e)(1+eh-e)}},$$

worin alle vierten Wurzeln positiv reell zu nehmen sind. Bei der hier getroffenen Wahl der Querschnitte liegen die Quotienten

$$\vartheta^{00}_{01}:\vartheta^{00}_{00},\quad \vartheta^{00}_{10}:\vartheta^{00}_{00},\quad \vartheta^{00}_{11}:\vartheta^{00}_{00}$$

oder die Grössen

$$\sqrt[4]{\frac{(2-h)(1-e^2)}{2(1-e^2(1-h)^2)}},\quad \sqrt[4]{\frac{(1-e^2)(1+e(1-h))}{2(1-e^2(1-h)^2)}} = \sqrt[4]{\frac{1-e^2}{2(1+eh-e)}},\quad \sqrt[4]{\frac{(2-h)(1+e)^2}{4(1+e-eh)}}$$

der Zahl Eins um so näher, je kleiner h ist, welcher Werth für $h = 0$ freilich nur vom ersten erreicht wird, während die beiden andern $\sqrt{(1+e):2}$ zur Grenze haben. Demnach wird wie beim gemeinen Pendel die Rechnung immer einfacher, bei gleichbleibender Genauigkeit, je kleiner h ist. Um ein näheres Urtheil über die Grössenverhältnisse von $p_0\; q_0\; r_0$ zu gewinnen, wollen wir für e und h die numerischen Werthe $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ setzen, mit denen sich leicht rechnen lässt. Dann ist

$$\sqrt[4]{4(1-e^2(1-h)^2)} = \sqrt[4]{4(1-\frac{16}{25.25})} = \tfrac{2}{5}\sqrt[4]{152{,}25} = \tfrac{2}{5}.3{,}529721,$$

$$\sqrt[4]{2(2-h)(1-e^2)} = \sqrt[4]{2\frac{9}{5}.\frac{24}{25}} = \tfrac{2}{5}\sqrt[4]{135} = \tfrac{2}{5}.3{,}408658,$$

$$\sqrt[4]{2(1-e^2)(1+e-eh)} = \sqrt[4]{2\frac{24}{25}.\frac{29}{25}} = \tfrac{2}{5}\sqrt[4]{87} = \tfrac{2}{5}.3{,}054084,$$

$$\sqrt[4]{(2-h)(1+e)^2(1+eh-e)} = \sqrt[4]{\frac{9}{5}.\frac{36}{25}.\frac{21}{25}} = \tfrac{2}{5}.\sqrt[4]{85{,}05} = \tfrac{2}{5}.3{,}036817.$$

Hieraus folgt

$$p_0 = \frac{1}{2}\frac{0{,}847478}{13{,}029280} = 0{,}03252213,\quad \lg p_0 = -3{,}42583466 \text{ näherungsweise } = i\pi\tau_{11},$$

$$q_0 = \frac{1}{2}\frac{0{,}138330}{13{,}029280} = 0{,}00530843,\quad \lg q_0 = -6{,}2384994 \text{ näherungsweise } = i\pi\tau_{22},$$

$$r_0 = \frac{1}{2}\frac{0{,}103796}{13{,}029280} = 0{,}00398319,\quad \frac{r_0}{p_0\,q_0} = 23{,}08200 \text{ näherungsweise } = e^{2i\pi\tau_{12}}+e^{-2i\pi\tau_{12}},$$

lg vulg 847478 = 5,9281295, lg vulg 13029280 = 7,1149205, lg vulg 2 = 0,3010300,
lg vulg 138330, = 5,1409164, lg vulg 103796 = 5,0161806.

Von den Grössen $p_0\; q_0\; r_0$ hat p_0 den grössten Werth, ist jedoch noch klein genug, dass man bei Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen $p_0\; q_0\; r_0$ unmittelbar für $p\; q\; r$ setzen kann. Wird eine grössere Genauigkeit gewünscht, so wird man in den Formeln (114) einige Glieder mehr berücksichtigen müssen. Es ist unschwer in jedem Falle numerischer Rechnung zu erkennen, welche Glieder den hauptsächlichsten weitern Beitrag liefern, und welche vernachlässigt werden können.

Bei der Berechnung der Hilfsveränderlichen $u_1\; u_2$ aus den Formeln (115) ist zu beachten, dass der Zuwachs dieser Grössen, wenn x von 0 bis h sich ändert, reell ist, dass aber sie selbst nicht reell sind, weil sie an der Stelle $x = 0$ nach (99) und (94) bez. die Werthe

$$u_1 = \tfrac{1}{2}\tau_{11} + \tfrac{1}{2},\quad u_2 = \tfrac{1}{2}\tau_{21} + \tfrac{1}{2}$$

haben, und die τ rein imaginäre Grössen sind. Es ist also

$$\int_0^x du_1 = u_1 - \tfrac{1}{2}\tau_{11} - \tfrac{1}{2}, \quad \int_0^x du_2 = u_2 - \tfrac{1}{2}\tau_{21} - \tfrac{1}{2}$$

und demnach

$$\vartheta^{00}_{00}\left(\int_0^x du_1, \int_0^x du_2\right) : \vartheta^{00}_{01}\left(\int_0^x du\right) : \vartheta^{00}_{10}\left(\int_0^x du\right) : \vartheta^{00}_{11}\left(\int_0^x du\right) =$$

$$\vartheta^{10}_{11}(u_1, u_2) : \vartheta^{10}_{10}(u_1, u_2) : \vartheta^{10}_{01}(u_1, u_2) : \vartheta^{10}_{00}(u_1, u_2) =$$

$$\frac{\sqrt{(x-k_1)(x-k_5)}}{\sqrt[4]{\Pi^{1,5}(k_1-k_\varrho)(k_5-k_\varrho)}} : \frac{\sqrt{(x-k_2)(x-k_6)}}{\sqrt[4]{\Pi^{2,6}(k_2-k_\varrho)(k_6-k_\varrho)}} : \frac{\sqrt{(x-k_2)(x-k_5)}}{\sqrt[4]{\Pi^{2,5}(k_2-k_\varrho)(k_5-k_\varrho)}} : \frac{\sqrt{(x-k_5)(x-k_6)}}{\sqrt[4]{\Pi^{5,6}(k_5-k_\varrho)(k_6-k_\varrho)}}$$

wie die Gleichungen (108) lehren. Die noch unbestimmten achten Wurzeln der Einheit ergeben sich sofort aus der Betrachtung, dass für $0 < x < h$ die vier Grössen $\vartheta^{00}_{00}(\int_0^x du)$, $\vartheta^{00}_{01}(\int_0^x du)$, $\vartheta^{00}_{10}(\int_0^x du)$, $\vartheta^{00}_{11}(\int_0^x du)$ positiv reell sind. Für $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ sind nun bez. die Werthe $\infty, \frac{e-1}{e}, 0, h, 2, \frac{1+e}{e}$ zu setzen, woraus folgt:

$$\vartheta^{00}_{00}\left(\int_0^x du\right) : \vartheta^{00}_{01}\left(\int_0^x du\right) : \vartheta^{00}_{10}\left(\int_0^x du\right) : \vartheta^{00}_{11}\left(\int_0^x du\right) =$$

$$\frac{\sqrt{e}\sqrt{1+e-ex}}{\sqrt[4]{2(1-e^2)(1+e-eh)}} : \frac{\sqrt{1-(1-x)^2e^2}}{\sqrt[4]{(1-e^2)^2(1-e^2(1-h)^2)e^2}} : \frac{\sqrt{(2-x)(1-e(1-x))}}{\sqrt[4]{4(2-h)(1-e)^2(1-e+eh)}} : \frac{\sqrt{(2-x)(1+e(1-x))}}{\sqrt[4]{4(1+e)^2(2-h)(1+e-he)}}.$$

Aus diesen Proportionen folgen dann die Werthe der Grössen $P(u)$, $Q(u)$ die zur Abkürzung unter (115) eingeführt wurden, nämlich es ist:

$$P(u) = \frac{\frac{\sqrt{e}\sqrt{1+e(1-x)}}{\sqrt[4]{2(1-e^2)(1+e-eh)}} + \frac{\sqrt{1-e^2(1-x)^2}}{\sqrt[4]{(1-e^2)^2(1-e^2(1-h)^2)e^2}} - \frac{\sqrt{(2-x)(1-e(1-x))}}{\sqrt[4]{4(2-h)(1-e)^2(1-e+eh)}} - \frac{\sqrt{(2-x)(1+e(1-x))}}{\sqrt[4]{4(1+e)^2(2-h)(1+e-eh)}}}{\frac{\sqrt{e}\sqrt{1+e(1-x)}}{\sqrt[4]{2(1-e^2)(1+e-eh)}} + \frac{\sqrt{1-e^2(1-x)^2}}{\sqrt[4]{(1-e^2)^2(1-e^2(1-h)^2)e^2}} + \frac{\sqrt{(2-x)(1-e(1-x))}}{\sqrt[4]{4(2-h)(1-e)^2(1-e+eh)}} + \frac{\sqrt{(2-x)(1+e(1-x))}}{\sqrt[4]{4(1+e)^2(2-h)(1+e-eh)}}},$$

$$Q(u) = \frac{\frac{\sqrt{e}\sqrt{1+e(1-x)}}{\sqrt[4]{2(1-e^2)(1+e-eh)}} - \frac{\sqrt{1-e^2(1-x)^2}}{\sqrt[4]{(1-e^2)^2(1-e^2(1-h)^2)e^2}} + \frac{\sqrt{(2-x)(1-e(1-x))}}{\sqrt[4]{4(2-h)(1-e)^2(1-e+eh)}} - \frac{\sqrt{(2-x)1+e(1-x)}}{\sqrt[4]{4(1+e)^2(2-h)(1+e-eh)}}}{\frac{\sqrt{e}\sqrt{1+e(1-x)}}{\sqrt[4]{2(1-e)^2(1+e-eh)}} + \frac{\sqrt{1-e^2(1-x)^2}}{\sqrt[4]{(1-e^2)^2(1-e^2(1-h)^2)e^2}} + \frac{\sqrt{(2-x)(1-e(1-x))}}{\sqrt[4]{4(2-h)(1-e)^2(1-e+eh)}} + \frac{\sqrt{(2-x)(1+e(1-x))}}{\sqrt[4]{4(1+e)^2(2-h)(1+e-eh)}}}.$$

In günstigen Fällen wird man nun nach (116)

$$\cos 2\pi \int_0^x du_1 = \cos 2\pi\left(\alpha_{11}\int_0^x dw_1 + \alpha_{21}\int_0^x dw_2\right) = P(u):2p_0,$$

$$\cos 2\pi \int_0^x du_2 = \cos 2\pi\left(\alpha_{12}\int_0^x dw_1 + \alpha_{22}\int_0^x dw_2\right) = Q(u):2q_0,$$

setzen können und hieraus $\int_0 du_1$, $\int_0 du_2$ vollständig, $\int_0 dw_1$, $\int_0 dw_2$ aber nach vorausgegangener Berechnung der Werthe von $A_{11}\ A_{12}\ A_{21}\ A_{22}$ auswerthen können. In weniger günstigen Fällen aber kann man die so erhaltenen Werthe nur als erste Näherungswerthe ansehen, und muss die in solchen Fällen üblichen Methoden zur Verbesserung dieses Werthes anwenden, wodurch natürlich die Mühe erheblich gesteigert wird.

Was nun die Werthe $A_{11}\ A_{12}\ A_{21}\ A_{22}$ betrifft, so werden sie mittels der Gleichungen (118) bis (123) gefunden, nachdem zuvor ihre Determinante durch die Gleichung (110)

$$1 : \sqrt{|A|} = \sqrt[4]{4(1-e^2(1-h)^2)} : 2\pi\vartheta = \sqrt[4]{4(1-e^2(1-h)^2)} : 2\pi(1+2p_0+2q_0+2r_0) =$$
$$\frac{\sqrt[4]{4(1-e^2(1-h)^2)}+\sqrt[4]{2(2-h)(1-e^2)}+\sqrt[4]{2(1-e^2)(1+e-eh)}+\sqrt[4]{(2-h)(1+e)^2(1+eh-e)}}{8\pi\sqrt[4]{e^3}}$$

gefunden ist. (Für $h = \frac{1}{3}$, $e = \frac{1}{3}$ ist $\sqrt{|A|} = 8\pi\sqrt[4]{1} : 13{,}02928$.) Hier ist eine vierte Wurzel der Einheit noch unbestimmt, indem der gegebene Ausdruck nur die Wurzel des absoluten Betrages von $|A|$ liefert.

Nehmen wir nun an, dass $\int_0^x dw_1$, $\int_0^x dw_2$ auf dem positiven Ufer der Linie $\overline{k_3\,k_4}$ ($\overline{\varkappa_2\,\varkappa_3}$ oder $0\ldots h$) im obern Blatte positiv imaginär sind, so sind die über b_2 erstreckten Integrale also die Grössen A_{12} A_{22} beide positiv imaginär, und es ist, wenn $h < 1$ ist, absolut genommen $A_{22} < A_{12}$. Zwischen k_1 und k_2 $\left(\infty \text{ und } -\frac{1-e}{e}\right)$ ist $\frac{dw_1}{dx}$ negativ imaginär $\frac{dw_2}{dx}$ positiv imaginär. Also ist das Produkt A_{11} A_{22} negativ reell, das Product A_{12} A_{21} positiv reell und also ist $|A|$ negativ. Dadurch ist das Vorzeichen bestimmt. Man erkennt noch leicht, dass A_{21} absolut genommen grösser ist als A_{11}. Nun giebt (118)

$$A_{11} = 4\pi\frac{d\vartheta^{01}_{01}}{dv_1} : \sqrt{|A|}\sqrt[4]{\frac{4(2-h)\,h(1-e^2)^2\,(1-e^2(1-h)^2)}{e^7}} = \sqrt[4]{1}\,\frac{8\pi e\,(p\sqrt[4]{q}\,(e^{i\pi\tau_{12}}-e^{-i\pi\tau_{12}})+\ldots)}{(1+2p+2q+2r)\sqrt[4]{(2-h)\,h(1-e^2)^2}},$$

$$A_{12} = 4\pi\frac{d\vartheta^{01}_{01}}{dv_2} : \sqrt{|A|}\sqrt[4]{\frac{4(2-h)\,h(1-e^2)^2(1-e^2(1-h)^2)}{e^7}} = \sqrt[4]{1}\,\frac{4\pi e\,(\sqrt[4]{q}+2p\sqrt[4]{q}\,(e^{i\pi\tau_{12}}+e^{-i\pi\tau_{12}})+\ldots)}{(1+2p+2q+2r)\sqrt[4]{(2-h)\,(1-e^2)^2 h}},$$

$$A_{21} = 4\pi\frac{d\vartheta^{10}_{10}}{dv_1} : \sqrt{|A|}\sqrt[4]{\frac{2(2-h)\,h(1-e^2)\,(1-e^2(1-h)^2)}{e^7}} = \sqrt[4]{1}\,\frac{\pi\sqrt{2e}\,(\sqrt[4]{p}-2q\sqrt[4]{p}\,(e^{i\pi\tau_{12}}+e^{-i\pi\tau_{12}})\ldots)}{(1+2p+2q+2r)\sqrt[4]{(2-h)\,(1-e^2)}},$$

$$A_{22} = 4\pi\frac{d\vartheta^{10}_{11}}{dv_2} : \sqrt{|A|}\sqrt[4]{\frac{2(2-h)\,h(1-e^2)\,(1-e^2(1-h)^2)}{e^7}} = \sqrt[4]{1}\,\frac{2\pi\sqrt{2e}\,(\sqrt[4]{p}\;q(e^{-i\pi\tau_{12}}-e^{i\pi\tau_{22}})+\ldots)}{(1+2p+2q+2r)\sqrt[4]{(2-h)\,(1-e^2)}}.$$

Die noch zu bestimmende vierte Wurzel der Einheit ergiebt sich sofort aus der schon gemachten Bemerkung, dass A_{11} A_{12} A_{22} positiv imaginäre Grössen sind, A_{21} aber negativ imaginär ist. Damit sind diese Grössen, und daher auch α_{11} α_{12} α_{21} α_{22} völlig bestimmt, und also können die w_1 w_2 gefunden werden.

Um nun die Zeit durch unsere Hilfsveränderlichen w oder u auszudrücken, schreiben wir:

$$e\sqrt{\tfrac{1}{2}g}\,t = \frac{1-e^2}{2}\int_0^x dw_1 + e^2\int_0^x dw_2 - \int_0^x \frac{\frac{1}{2}x^2\,dx}{s}$$
$$= \frac{1-e^2}{2}\int_0^x dw_1 + e^2\int_0^x dw - A_1^{\infty}\int_0^x du_1 - A_2^{\infty}\int_0^x du_2$$
$$+Z^{01}_{01}(2\int_0^x du_1,\ 2\int_0^x du_2)\alpha_{21} + I^{01}_{01}(2\int_0^x du_1,\ 2\int_0^x du_2)\alpha_{22}$$

gemäss der Formeln (137). Die Zeit $\frac{1}{2}T$, welche vergeht, während x von 0 bis h wächst, also die halbe Schwingungsdauer erhält man, wenn man in der letzten Gleichung den Zuwachs bestimmt, den man erhält, wenn w_1 um $\frac{1}{2}A_{12}$, w_2 um $\frac{1}{2}A_{21}$, also u um 0, u_2 um $\frac{1}{2}$ vermehrt wird. Dann bleibt die Z und I-Function ungeändert und man erhält die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}e\sqrt{\tfrac{1}{2}g}\,T = \frac{1-e^2}{2}A_{12} + e^2 A_{22} - \tfrac{1}{2}A_2^{\infty}.$$

Um also die Schwingungsdauer zu berechnen, hat man noch nöthig A_2^{∞} durch bekannte Grössen auszudrücken. Nun erhält man aber aus (138) wenn man dort $k_\mu = 0$, $k_\nu = 2$ setzt

$$
\begin{aligned}
A_2^{\infty} &= A_{22} - 2\frac{d^2\vartheta}{dv_1\,dv_2}\cdot\frac{\alpha_{21}}{\vartheta} - 2\frac{d^2\vartheta}{dv_2\,dv_2}\cdot\frac{\alpha_{22}}{\vartheta} \\
&= A_{22} + \frac{2A_{12}}{|A|\,\vartheta}\cdot\frac{d^2\vartheta}{dv_1\,dv_2} - \frac{2A_{11}}{|A|\,\vartheta}\,\frac{d^2\vartheta}{dv_2\,dv_2} \\
&= A_{22} + \frac{16\,A_{12}\pi^2}{|A|}\,\frac{pq(e^{-2i\pi\tau_{12}} - e^{2i\pi\tau_{12}}) + \ldots}{1+2p+2q+2r+\ldots} + \frac{16\,\pi^2 A_{11}}{|A|}\,\frac{q+r+\ldots}{1+2p+2q+2r+\ldots}
\end{aligned}
$$

worin alle Ausdrücke bekannt sind.

Dies möge genügen, die Anwendbarkeit auch der Rosenhainschen Functionen zur numerischen Auswerthung ultraelliptischer Integrale zu zeigen.

Man corrigire Folgendes: In Formel (55) Zeile 2 lies $d \lg q$ statt dq. In (56) ergänze am Ende du. In Formel (68) lies $-E:K$ statt E. Man kann noch dort $E = \pi^2 \Sigma (2m+1)^2 q^{m \cdot \overline{m+1}} : 4K \Sigma q^{m \cdot \overline{m+1}}$ hinzufügen. In Formel (101) Zeile 3, wo Ω erklärt wird, ist hinter $\frac{1}{4}(\ldots + h_2 h_2 \tau_{22})$ der Factor $i\pi$ zu setzen. In den Formeln (108) muss das Glied hinter dem Gleichheitszeichen mit ϑ_{10}^{00} statt ϑ_{10}^{01} anfangen. In der folgenden Zeile lies $\Pi^{1,5}$ statt $\Pi^{1,1}$. Die letzte ϑ-Function der vierten Zeile muss ϑ_{10}^{01} statt ϑ_{11}^{01} heissen. In (114) Zeile 2 lies $r_0{}^4$ statt $r_0{}^1$. In (132) lies $1:4(x-k_\lambda)$ statt $1:4(x-k_\mu)$. Auf Seite 23 lies in der Determinante a_{33} statt a_{35}.

Halle, Druck von E. Karras.